จำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

(Olymaths : พงศ์ทอง แซ่เฮ้ง)

ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เราทราบว่า $C_{n,\,r}$ หรือ $\binom{n}{r}$ แทน จำนวนวิธีในการเลือกของ r สิ่ง จากของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยที่

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}}$$

พิจารณาปัญหาต่อไปนี้ มีลูกอมที่เหมือนกัน 4 ลูก ต้องการแบ่งให้คน 3 คน คือ a, b และ c โดยมีข้อแม้ว่า แต่ละคนจะต้องได้ลูกอมอย่างน้อยคนละ 1 ลูก จะพบว่าเราสามารถแบ่งได้ทั้งหมด 3 วิธี คือ (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1) โดยที่ (1, 1, 2) หมายถึง a ได้ 1 เม็ด b ได้ 1 เม็ด และ c ได้ 2 เม็ด เป็นต้น.

ปัญหาดังกล่าวสมมูลกันกับ "จงหาจำนวนชุดคำตอบของสมการ $a+b+c=4$ โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก" นอกจากนี้คำตอบทั้ง 3 แบบ สามารถแทนได้ด้วย ดอกจันและแท่ง (stars and bars) ดังนี้

||** แทน (1, 1, 2)

*|**|* แทน (1, 2, 1)

**|*|* แทน (2, 1, 1)

ซึ่งเมื่อพิจารณา **** จะพบว่ามีช่องว่างระหว่าง * ด้วยกัน 3 ช่อง เราจะต้องเลือกว่านำ | จำนวน 2 แท่ง ไปวางใน 2 ช่องใด จาก 3 ช่อง จะเลือกได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

ทฤษฎีบท 1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n$$

มีค่าเท่ากับ $\binom{n-1}{r-1}$

การพิสูจน์ พิจารณาลำดับ 1, 1, 1, ... , 1, 1 โดยที่มี 1 อยู่จำนวน n ตัว แบ่งลำดับออกเป็น r พวก โดยการเลือกช่องว่าง $r-1$ ช่อง จาก $n-1$ ช่อง ระหว่าง 1 ทั้ง n ตัว ซึ่งเลือกได้ $\binom{n-1}{r-1}$ วิธี จากนั้นรวมจำนวนในแต่ละกลุ่มทั้ง r กลุ่ม ก็จะแทน $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$ ตามลำดับ

เราจะใช้ทฤษฎีบทนี้เป็นหลักการสำคัญในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ตั้งแต่ง่ายที่สุดไปจนยากขึ้นตามลำดับ เมื่อผู้อ่านศึกษาจนจบแล้ว ผู้เขียนหวังว่าจะทำให้ผู้อ่านเข้าใจและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในการแก้ปัญหาอื่น ๆ

ตัวอย่าง 1 จะมีกี่วิธีในการเขียน 10 ให้อยู่ในรูปผลบวกของจำนวนเต็มบวกสามจำนวน

วิธีทำ $10 = 1 + 1 + 8$ ถือเป็น 1 วิธี และ ต่างกับ $1 + 8 + 1$ เป็นต้น จะได้ว่า คำตอบที่ต้องการคือจำนวนชุดของจำนวนเต็มสามอันดับ (a, b, c) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $a + b + c = 10$ โดยที่ $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ นั่นเอง

โดยทฤษฎีบท 1 จะมีทั้งหมด $\binom{10-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$ วิธี

ตัวอย่าง 2 จงหาจำนวนคำตอบของสมการ

$$a + b + c + d = 100$$

โดยที่ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม และ $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$

วิธีทำ สมมติให้ $a' = a + 1$, $b' = b + 1$, $c' = c + 1$, $d' = d + 1$

จะได้ว่า $a' \geq 1, b' \geq 1, c' \geq 1, d' \geq 1$

และ $a = a' - 1$, $b = b' - 1$, $c = c' - 1$, $d = d' - 1$

เมื่อแทนค่ากลับลงไปในสมการ $a + b + c + d = 10$ จะได้

$$(a' - 1) + (b' - 1) + (c' - 1) + (d' - 1) = 10$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ $a' + b' + c' + d' = 104$

โดยที่ $a' \geq 1, b' \geq 1, c' \geq 1, d' \geq 1$ นั่นเอง

โดยทฤษฎีบท 1 จะได้จำนวนคำตอบทั้งหมดเท่ากับ $\binom{104-1}{4-1} = \binom{103}{3} = 176,851$

ตัวอย่าง 3 จงหาจำนวนชุดของจำนวนเต็มสี่อันดับ (a, b, c, d) ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$a + b + c + d = 100$$

โดยที่ $a \geq 25, b \geq 16, c \geq 1, d \geq 1$

วิธีทำ สมมติให้ $a' = a - 24, b' = b - 15$ จะได้ว่าสมการที่ให้มาสมมูลกันกับ

$$a' + b' + c + d = 61$$

โดยที่ $a' \geq 1, b' \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$

ซึ่งมีคำตอบทั้งหมด $\binom{60}{3} = 34{,}220$ ชุด

ตัวอย่าง 4 จงหาจำนวนชุดของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบสี่อันดับ (a, b, c, d) ที่สอดคล้องอสมการ

$$a + b + c + d \leq 2007$$

วิธีทำ อสมการ $a + b + c + d \leq 2007$, $a \geq 0, b \geq 0, \geq 0, d \geq 0$ สมมูลกับสมการ

$$a + b + c + d + e = 2007$$

เมื่อ e เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทั้งนี้เพราะ จาก $a + b + c + d = 2007 - e$ แต่ $a + b + c + d \leq 2007$ จะได้ว่า $2007 - e \leq 2007$ ด้วย นั่นคือ $e \geq 0$

สมมติให้ $a' = a + 1, b' = b + 1, c' = c + 1, d' = d + 1, e' = e + 1$ จะได้ว่า

$$a' + b' + c' + d' + e' = 2012 \ , \quad a' \geq 1, b' \geq 1, c' \geq 1, d' \geq 1, e' \geq 1$$

ซึ่งมีจำนวนคำตอบทั้งหมด $\binom{2011}{4}$ ชุด

พิจารณาเซตกำจัดเซตหนึ่ง สมมติให้ U แทน เอกภพสัมพัทธ์ และ A แทน เซตใดๆ ภายใต้เอกภพสัมพัทธ์นั้น เราจะได้ว่า $A \cap A' = \phi$ และ $A \cup A' = U$ ทำให้ได้ว่า $n(A) + n(A') = n(U)$ เมื่อ n(A) แทน จำนวนสมาชิกของเซต A

ดังนั้น $\boxed{n(A') = n(U) - n(A)}$

ตัวอย่าง 5 จงหาจำนวนผลเฉลยของจำนวนเต็มที่สอดคล้องสมการ

$$a + b + c = 23 \ , 1 \leq a \leq 5, b \geq 1, c \geq 1$$

วิธีทำ ให้ U แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a + b + c = 23 , \quad a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$

และ A แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a + b + c = 23 , \quad a \geq 6, b \geq 1, c \geq 1$

จะได้ A′ แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a + b + c = 23 , \quad 1 \leq a \leq 5, b \geq 1, c \geq 1$

ซึ่งเป็นสิ่งที่เราต้องการนั่นเอง

หา n(U) : โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ $n(U) = \binom{22}{2}$

หา n(A) : สมมติให้ $a' = a - 5$ จะได้ $a' + b + c = 18 \quad , \quad a' \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$

$$\therefore \quad n(A) = \binom{17}{2}$$

จึงได้ว่า $n(A') = n(U) - n(A) = \binom{22}{2} - \binom{17}{2} = 231 - 136 = 95$

ตัวอย่าง 6 จงหาจำนวนผลเฉลยของจำนวนเต็มที่สอดคล้องสมการ

$$a + b + c = 31 \ , 7 \le a \le 17, b \ge 1, c \ge 1$$

วิธีทำ

สมมติให้ $a' = a - 6$ จะได้สมการที่ต้องการสมมูลกับ $a' + b + c = 25$, $1 \le a' \le 11, b \ge 1,$ $c \ge 1$

สมมติให้ U แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a' + b + c = 25$, $a' \ge 1, b \ge 1, c \ge 1$

และ A แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a' + b + c = 25$, $a' \ge 12, b \ge 1, c \ge 1$

จะได้ A' แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a' + b + c = 25$, $1 \le a' \le 11, b \ge 1, c \ge 1$

หา n(U) : จะได้ $\binom{24}{2}$

หา n(A) : สมมติให้ $a'' = a' - 11$ จะได้ $a'' + b + c = 14$, $a'' \ge 1, b \ge 1, c \ge 1$

$$\therefore \quad n(A) = \binom{13}{2}$$

จึงได้ว่า $n(A') = \binom{24}{2} - \binom{13}{2} = 276 - 78 = 198$

ในทำนองเดียวกันสำหรับเซตจำกัด 2 เซต เรามี $n(A \cup B) + n(A \cup B)' = n(U)$

แต่ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ และ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$\therefore \quad \boxed{n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)}$$

ตัวอย่าง 87 จงหาจำนวนผลเฉลยของจำนวนเต็มที่สอดคล้องสมการ

$$a + b + c + d = 100$$

โดยที่ $a \ge 0, 1 \le b \le 8 , 10 \le c \le 20, \ d \ge -3$

วิธีทำ สมมติให้ $a' = a + 1, \ c' = c - 9, \ d' = d + 4$ จะได้สมการที่ต้องการสมมูลกันกับ

$$a' + b + c' + d' = 96$$

เมื่อ $a' \geq 1,\quad 1 \leq b \leq 8,\quad 1 \leq c' \leq 11,\quad d' \geq 1$

สมมติให้ U แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a' + b + c' + d' = 96$

เมื่อ $a' \geq 1, b \geq 1, c' \geq 1, d' \geq 1$

และ A แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a' + b + c' + d' = 96$

เมื่อ $a' \geq 1, b \geq 9, c' \geq 1, d' \geq 1$

และ B แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a' + b + c' + d' = 96$

เมื่อ $a' \geq 1, b \geq 1, c' \geq 12, d' \geq 1$

ดังนั้น $A \cap B$ แทนเซตผลเฉลยของสมการ $a' + b + c' + d' = 96$

เมื่อ $a' \geq 1, b \geq 9, c' \geq 12, d' \geq 1$

จะได้ A' แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a' + b + c' + d' = 96$

เมื่อ $a' \geq 1, 1 \leq b \leq 8, c' \geq 1, d' \geq 1$

และ B' แทน เซตผลเฉลยของสมการ $a' + b + c' + d' = 96$

เมื่อ $a' \geq 1, b \geq 1, 1 \leq c' \leq 11, d' \geq 1$

สิ่งที่เราต้องการ คือ $n(A' \cap B')$ นั่นเอง

หา $n(U)$: จะได้ $n(U) = \binom{95}{3}$

หา $n(A)$: โดยสมมติให้ $b' = b - 8$ จะได้ $n(A) = \binom{87}{3}$

หา $n(B)$: โดยสมมติให้ $c'' = c' - 11$ จะได้ $n(B) = \binom{84}{3}$

หา $n(A \cap B)$: โดยสมมติให้ $b' = b - 8, c'' = c' - 11$ จะได้ $n(A \cap B) = \binom{76}{3}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } n(A' \cap B') &= \binom{95}{3} - \binom{87}{3} - \binom{84}{3} + \binom{76}{3} \\ &= 138{,}415 - 105{,}995 - 95{,}284 + 70{,}300 \\ &= 7{,}436 \end{aligned}$$

ในกรณีถ้าเป็น 3 เซตจำกัด $n(A \cup B \cup C) + n(A \cup B \cup C)' = n(U)$ แต่เรามีสูตรว่า $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ และ $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} n(A' \cap B' \cap C') &= n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(B \cap C) \\ &\quad + n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 8 จงหาจำนวนผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16$$

โดยที่ x_1, x_2 และ x_3 เป็นจำนวนเต็ม และ $1 \le x_1 \le 6, 1 \le x_2 \le 7, 1 \le x_3 \le 8$

วิธีทำ

สมมติให้ U แทน เซตผลเฉลยของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 16$ ... (*)

เมื่อ $x_1 \ge 1, x_2 \ge 1, x_3 \ge 1$

และ A แทน เซตผลเฉลยของสมการ (*)

เมื่อ $x_1 \ge 7, x_2 \ge 1, x_3 \ge 1$

และ B แทน เซตผลเฉลยของสมการ (*)

เมื่อ $x_1 \ge 1, x_2 \ge 8, x_3 \ge 1$

และ C แทน เซตผลเฉลยของสมการ (*)

เมื่อ $x_1 \ge 1, x_2 \ge 1, x_3 \ge 9$

จะได้ $A \cap B$ แทน เซตผลเฉลยของสมการ (*)

เมื่อ $x_1 \ge 7, x_2 \ge 8, x_3 \ge 1$

และ $B \cap C$ แทน เซตผลเฉลยของสมการ (*)

เมื่อ $x_1 \ge 1, x_2 \ge 8, x_3 \ge 9$

และ $C \cap A$ แทน เซตผลเฉลยของสมการ (*)

เมื่อ $x_1 \ge 7, x_2 \ge 1, x_3 \ge 9$

และ $A \cap B \cap C$ แทน เซตผลเฉลยของสมการ (*)

เมื่อ $x_1 \ge 7, x_2 \ge 8, x_3 \ge 9$

ดังนั้น $A' \cap B' \cap C'$ แทน เซตผลเฉลยของสมการ (*)
เมื่อ $1 \le x_1 \le 6, 1 \le x_2 \le 7, 1 \le x_3 \le 8$

เมื่อหา n(U), n(A), n(B), n(C) จะได้ $\binom{15}{2}, \binom{9}{2}, \binom{8}{2}, \binom{7}{2}$ ตามลำดับ

และ $n(A \cap B), n(B \cap C), n(C \cap A), n(A \cap B \cap C)$ จะได้ $\binom{2}{2}$, 0, 0, 0 ตามลำดับ

ดังนั้น $n(A' \cap B' \cap C') = \binom{15}{2} - \binom{9}{2} - \binom{8}{2} - \binom{7}{2} + \binom{2}{2} + 0 + 0 - 0$
$= 105 - 36 - 28 - 21 + 1 = 21$

โดยทั่วไปสูตรการนับจำนวนสมาชิกในเซต กรณีที่มีเซตจำกัดเซตเดียว สองเซต สามเซต ดังที่ผ่านมา หรือ มากกว่านั้นขึ้นไปเราเรียกว่า **หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก** (principle of inclusion–exclusion) ผู้เขียนขอให้ผู้อ่านที่ไม่ทราบ ลองค้นคว้าเพิ่มเติมด้วยตนเองดู

ตัวอย่าง 9 จงหาจำนวนผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ สอดคล้องสมการ

$$7x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

วิธีทำ จาก $x_2 + x_3 + x_4 = 13 - 7x_1$

แต่ $x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$ ทำให้ได้ว่า $x_2 + x_3 + x_4 \ge 0$

ดังนั้น $13 - 7x_1 \ge 0 \quad \leftrightarrow \quad x_1 \le 1\frac{6}{7}$

แต่ $x_1 \ge 0$ ดังนั้น $0 \le x_1 \le 1\frac{6}{7}$

กรณีที่ 1 : $x_1 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 13$ จะได้จำนวนผลเฉลย คือ $\binom{15}{2}$

กรณีที่ 2 : $x_1 = 1, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 6$ จะได้จำนวนผลเฉลย คือ $\binom{8}{2}$

รวมสองกรณี คำตอบทั้งหมดจึงมีค่าเท่ากับ $\binom{15}{2} + \binom{8}{2} = 133$

ตัวอย่าง 10 จงหาจำนวนผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$6x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

วิธีทำ จาก $7x_2 + x_3 + x_4 = 13 - 6x_1 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad 0 \leq x_1 \leq 2\frac{1}{6}$

จาก $6x_1 + x_3 + x_4 = 13 - 7x_2 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad 0 \leq x_2 \leq 1\frac{6}{7}$

กรณีที่ 1 : $x_2 = 0$, $6x_1 + x_3 + x_4 = 13$

กรณีที่ 1.1 : $x_1 = 0$, $x_3 + x_4 = 13$ จำนวนคำตอบ คือ $\binom{14}{1}$

กรณีที่ 1.2 : $x_1 = 1$, $x_3 + x_4 = 7$ จำนวนคำตอบ คือ $\binom{8}{1}$

กรณีที่ 1.3 : $x_1 = 2$, $x_3 + x_4 = 1$ จำนวนคำตอบ คือ $\binom{2}{1}$

กรณีที่ 2 : $x_2 = 1$, $6x_1 + x_3 + x_4 = 6$

กรณีที่ 2.1 : $x_1 = 0$, $x_3 + x_4 = 6$ จำนวนคำตอบ คือ $\binom{7}{1}$

กรณีที่ 2.2 : $x_1 = 1$, $x_3 + x_4 = 0$ จำนวนคำตอบ คือ $\binom{1}{1}$

กรณีที่ 2.3 : $x_1 = 2$, $x_3 + x_4 = -6$ ไม่มีคำตอบ

รวมคำตอบทั้งสองกรณีจะได้ $\binom{14}{1} + \binom{8}{1} + \binom{2}{1} + \binom{7}{1} + \binom{1}{1} = 32$

ตัวอย่าง 11 จงหาจำนวนผลเฉลยของจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 91$$

วิธีทำ เพราะว่า $91 = 13 \cdot 7$ จะได้

กรณีที่ 1 : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ และ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7$

ซึ่งมีจำนวนผลเฉลย $\binom{12}{3}$ และ $\binom{6}{4}$ เมื่อจับคู่กันจะได้จำนวนผลเฉลยในกรณีนี้ คือ $\binom{12}{3}\binom{6}{4}$

กรณีที่ 2 : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ และ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 13$

ซึ่งมีจำนวนผลเฉลย $\binom{6}{3}$ และ $\binom{12}{4}$ เมื่อจับคู่กันจะได้จำนวนผลเฉลยในกรณีนี้ คือ $\binom{6}{3}\binom{12}{4}$

รวมคำตอบทั้งสองกรณีจะได้ $\binom{12}{3}\binom{6}{4}+\binom{6}{3}\binom{12}{4}=13{,}200$

ตัวอย่าง 12 จงหาจำนวนผลเฉลยของจำนวนเต็มที่สอดคล้องสมการ

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{100}=5{,}048$$

โดยที่ $0\le x_i\le i$ สำหรับทุก $i=1, 2, 3, \ldots, 100$

วิธีทำ ปัญหาข้อนี้หากจะนับแบบที่ผ่านมา โดยใช้หลักการนับเกี่ยวกับเซตจะทำได้ยาก หากพิจารณาเงื่อนไขของโจทย์ คือ $0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 2, \ldots, 0\le x_{100}\le 100$ ให้สังเกตว่า $1+2+3+\ldots+100=5{,}050$ มีค่ามากกว่า 5,048 เล็กน้อย เราจะทำการแปลงปัญหาเพื่อให้นับได้ง่ายขึ้น ดังนี้

สมมติให้ $y_i=i-x_i$ ทุก $i=1, 2, 3, \ldots, 100$

จะได้ว่า $y_1 = 1-x_1 \quad , \quad 0\le y_1\le 1$

$y_2 = 2-x_2 \quad , \quad 0\le y_2\le 2$

$\vdots$

$y_{100}= 100-x_{100} \quad , \quad 0\le y_{100}\le 100$

ดังนั้น $(1+2+\ldots+100)-(y_1+y_2+\ldots+y_{100})=5{,}048$

$y_1+y_2+\ldots+y_{100}=2$

สมการนี้ทำให้สามารถนับได้ง่ายกว่า โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 : $2=0+0+\ldots+0+2$

เลือก $y_2, y_3, \ldots, y_{100}$ มา 1 ตัว ให้มีค่าเท่ากับ 2 ส่วนจำนวนที่เหลือเป็นศูนย์ทั้งหมด

ทำได้ $\binom{99}{1}$ วิธี

กรณีที่ 2 : $2=0+0+0+\ldots+0+1+1$

เลือกจาก $y_1, y_2, \ldots, y_{100}$ มา 2 ตัว ให้มีค่าเท่ากับ 1 ส่วนจำนวนที่เหลือเป็นศูนย์ทั้งหมด ทำได้ $\binom{100}{2}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนผลเฉลยทั้งหมดเท่ากับ $\binom{99}{1}+\binom{100}{2}=5{,}049$

ตัวอย่าง 13 (TMO ครั้งที่ 1, 2547) นักเรียน 18 คน ที่สูงต่างกันทั้งหมด ยืนเข้าแถวตอนเพื่อเคารพธงชาติ ครูประจำชั้นต้องการให้นักเรียนยืนเรียงตามลำดับความสูง โดยให้นักเรียนที่สูงที่สุดอยู่ท้ายแถว เมื่อครูเดินตรวจแถว หากพบว่านักเรียนที่ยืนติดกันนั้นเรียงลำดับความสูงไม่ถูกต้อง ก็จะทำการสลับตำแหน่งนักเรียนคู่ที่พบนั้น แล้วเดินตรวจเรื่อยๆจนกว่านักเรียนจะเรียงลำดับความสูงได้ถูกต้องทั้งหมด ถ้าครูต้องสลับตำแหน่งนักเรียนทั้งหมด 150 คู่ แล้วนักเรียนจะเข้าแถวได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ สมมติให้นักเรียนทั้ง 18 คน แทนด้วยจำนวน 1, 2, 3, ... , 18 โดย 1 แทน คนที่เตี้ยที่สุด เพื่อความเข้าใจปัญหาดียิ่งขึ้น สมมติว่ามีนักเรียน 3 คน คือ 1, 2, 3 จะพบว่ามีการเข้าแถวที่แตกต่างกันทั้งหมด 3! = 6 แบบ คือ 123, 132, 213, 231, 312, 321

จากนั้นสมมติว่าในแต่ละแบบเราจะเริ่มตรวจแถวตั้งแต่ซ้ายมือไปขวามือ หากพบว่าจำนวนด้านซ้ายมือมากกว่าขวามือ ก็จะสลับกัน แล้วนับจำนวนครั้งทั้งหมดของการสลับ

123 หยุด

132 $\rightarrow$ 123 หยุด

213 $\rightarrow$ 123 หยุด

231 $\rightarrow$ 213 $\rightarrow$ 123 หยุด

312 $\rightarrow$ 132 $\rightarrow$ 123 หยุด

321 $\rightarrow$ 231 $\rightarrow$ 213 $\rightarrow$ 123 หยุด

จะพบว่าจำนวนครั้งของการสลับของการเข้าแถวแบบ 123, 132, 213, 231, 312, 321 จะมีจำนวนทั้งสิ้น 0, 1, 1, 2, 2, 3 ครั้ง ตามลำดับ

สมมติให้ x_i แทน จำนวนนักเรียนที่อยู่ด้านหน้าและสูงกว่านักเรียนคนที่ i ใด ๆ ทั้งหมด เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots$

เช่น 9, 1, 5, 7, 2, 4, ... จะพบว่านักเรียนคนที่ 6 คือ 4 จำนวนคนที่สูงกว่าเขามีอยู่ 3 คน คือ 9, 5, 7 นั่นคือ $x_6 = 3$ เป็นต้น.

ดังนั้นหากมี 3 คน ในแต่ละแบบของการเข้าแถว จะได้ว่า

123 : $x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 0\quad (x_1 + x_2 + x_3 = 0)$

132 : $x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 1\quad (x_1 + x_2 + x_3 = 1)$

213 : $x_1 = 0,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 0\quad (x_1 + x_2 + x_3 = 1)$

231 : $x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 2\quad (x_1 + x_2 + x_3 = 2)$

312 : $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1 \quad (x_1 + x_2 + x_3 = 2)$

321 : $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2 \quad (x_1 + x_2 + x_3 = 3)$

ให้สังเกตว่าผลรวมของ x_i แต่ละจำนวนทั้งหมด จะเท่ากับจำนวนครั้งของการสลับ ซึ่งต้องเป็นเช่นนั้น ทั้งนี้เพราะตามที่เราสมมติให้ x_i แทน จำนวนนักเรียนที่อยู่หน้าและสูงกว่านักเรียนคนที่ i ใด ๆ ซึ่งในที่สุดแล้ว เราจะต้องสลับระหว่างคนที่อยู่หน้าคนที่ i กับคนที่ i นั้น เป็นจำนวน i ครั้งพอดี

นั่นคือในแต่ละจำนวนครั้งทั้งหมดของการสลับ เราจะสามารถสร้างวิธีการเข้าแถวที่แตกต่างกัน โดยมีจำนวนทั้งหมด เท่ากับจำนวนผลเฉลยของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{18} = 150$ โดยที่ $0 \le x_i \le i - 1$, $i = 1, 2, 3, \dots , 18$ (กล่าวคือ $x_1 = 0$, $0 \le x_2 \le 1$, $0 \le x_3 \le 2$, ... , $0 \le x_{18} \le 17$)

สมมติให้ $y_i = i - 1 - x_i$, $i = 1, 2, 3, \dots , 18$ จะได้ว่า

$$(0 + 1 + 2 + \dots + 17) - (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{18}) = 150$$

โดยที่ $0 \le y_i \le i - 1$, $i = 1, 2, 3, \dots , 18$

ดังนั้น $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{18} = 3$

กรณีที่ 1 : $18 = 0 + \dots + 0 + 3$ เลือกได้ $\binom{15}{1}$ วิธี (จาก $y_4, y_5, \dots , y_{18}$)

กรณีที่ 2 : $18 = 0 + \dots + 0 + 1 + 2$ เลือกได้ $\binom{16}{1}\binom{16}{1}$ วิธี (เลือก 2 ก่อนแล้วค่อยเลือก 1)

กรณีที่ 3 : $18 = 0 + \dots + 0 + 1 + 1 + 1$ เลือกได้ $\binom{17}{3}$ วิธี (จาก $y_2, y_3, \dots , y_{18}$)

ซึ่งมีจำนวนคำตอบทั้งสิ้น $\binom{15}{1} + \binom{16}{1}\binom{16}{1} + \binom{17}{3} = 951$ วิธี

หนังสืออ้างอิง

1. สมพร สูตินันท์โอภาส , **คณิตศาสตร์ทางด้านวิธีจัดหมู่เบื้องต้น** , มหาวิทยาลัยรามคำแหง 2533
2. สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล, **ภินทนคณิตศาสตร์** (E-Book) , 2542

3. CHEN CHUAN-CHONG and KOH KHEE-MENG , **principles and techniques in combinatorics** , World Scientific 1992
4. DAVID A. SANTOS , **Junior Problem Seminar** (December 2004)
5. http://www.mathcenter.net/cgi-bin/ultimatebb.cgi?ubb=get_topic&f=1&t=000637&p=
6. http://www.mathcenter.net/cgi-bin/ultimatebb.cgi?ubb=get_topic&f=2&t=000010&p=1