ถ้า $a = 1, b = 1$ จะได้ $2^a \times 3^b = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

ถ้า $a = 2, b = 0$ จะได้ $2^a \times 3^b = 2^2 \times 3^0 = 4 \times 1 = 4$

ถ้า $a = 2, b = 1$ จะได้ $2^a \times 3^b = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$

ดังนั้นตัวประกอบที่เป็นจำนวนบวกของ 12 จะมีทั้งสิ้น 6 จำนวน ได้แก่ 1, 3, 2, 6, 4, 12

6 มาจาก 3×2 โดยที่ 3 คือค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ a คือ 0, 1, 2

และ 2 คือค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ b คือ 0, 1

นั่นคือถ้าเขียนจำนวนนับ N ในรูป $N = 2^a \times 3^b$ แล้วจำนวนตัวประกอบที่เป็นจำนวนบวกของ N จะมีทั้งหมด $(a+1) \times (b+1)$ ตัว

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $N = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$ แล้วจำนวนตัวประกอบที่เป็นจำนวนบวกของ N จะมีทั้งหมด $(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times (d+1)$ ตัว

เช่น
$$5880 = 7 \times 840 = 7 \times 8 \times 105 = 7 \times 2^3 \times 5 \times 21$$
$$= 7 \times 2^3 \times 5 \times 3 \times 7 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^2$$

จะมีตัวประกอบที่เป็นจำนวนบวกทั้งสิ้น $(3+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (2+1) = 4 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$ จำนวน

สำหรับปัญหาในข้อนี้
$$\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1000 + \overline{abc} = 1000\,\overline{abc} + \overline{abc}$$
$$= 1001 \times \overline{abc}$$

แต่
$$1001 = 7 \times 143 = 7 \times 11 \times 13$$

ดังนั้น
$$\overline{abcabc} = 1001 \times \overline{abc} = 7^1 \times 11^1 \times 13^1 \times \overline{abc}^{\,1}$$

ถ้า $\overline{abcabc}$ มีตัวประกอบที่เป็นจำนวนบวกทั้งสิ้น 16 จำนวนพอดี แล้วแสดงว่า $\overline{abc}$ จะต้องเป็นจำนวนเฉพาะ เพราะว่า $(1+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

จำนวนเฉพาะสามหลักที่มีค่าน้อยที่สุดคือ 101 แล้ว $\overline{abc} = 101$

ดังนั้น $\overline{abcabc} = 101101$

8. **ตอบ** 12,504

แนวคิด	1. หาว่าจำนวนห้าหลักที่เป็นพหุคูณของ 3 มีทั้งหมดกี่จำนวน 2. หาว่าจำนวนห้าหลักที่เป็นพหุคูณของ 3 และไม่มีเลขโดด 3 อยู่เลย มีทั้งหมดกี่จำนวน 3. นำผลลัพธ์ในข้อ 1. ลบด้วยผลลัพธ์ใน ข้อ 2. เป็นคำตอบที่ต้องการ

ความรู้ประกอบ

1. จำนวนนับใด ๆ จะหารด้วย 3 ลงตัวก็ต่อเมื่อ ผลบวกของเลขโดดทั้งหมดของจำนวนนับนั้น หารด้วย 3 ลงตัว เช่น 10251 หารด้วย 3 ลงตัว เพราะว่า $1+0+2+5+1$ หารด้วย 3 ลงตัว

2. เศษจากการหารจำนวนนับใด ๆ (หรือจำนวนเต็มใด ๆ) ด้วย 3 จะเป็นไปได้ 3 แบบคือ 0, 1 หรือ 2

หาว่าจำนวนห้าหลักที่เป็นพหุคูณของ 3 มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีที่ 1 นับโดยตรง

ได้แก่ 10002, 10005, 10008, … , 99999

ถ้านำแต่ละจำนวนไปลบด้วย 9999 จะได้

3, 6, 9, … , 90000

จากนั้นนำ 3 ไปหารทุกตัวจะได้

1, 2, 3, … , 30000

จำนวนตั้งแต่ 1, 2, 3, … , 30000 มีทั้งหมด 30,000 จำนวน

ดังนั้น จำนวนในลำดับ 10002, 10005, 10008, … , 99999 ก็จะมี 30,000 จำนวน เช่นกัน

วิธีที่ 2 ใช้กฎการคูณ

พิจารณาจำนวนห้าหลักในรูป $\overline{abcde}$

ขั้นที่ 1 หลักหน่วย คือ e เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 10 ตัวคือ 0, 1, 2, … , 9 เลือกได้ทั้งหมด 10 วิธี

ขั้นที่ 2 หลักสิบ คือ d เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 10 ตัวคือ 0, 1, 2, … , 9 เลือกได้ทั้งหมด 10 วิธี

ขั้นที่ 3 หลักร้อย คือ c เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 10 ตัวคือ 0, 1, 2, … , 9 เลือกได้ทั้งหมด 10 วิธี

ขั้นที่ 4 หลักพัน คือ b เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 10 ตัวคือ 0, 1, 2, … , 9 เลือกได้ทั้งหมด 10 วิธี

ตอนนี้เราจะได้จำนวน 5 หลัก เช่น $\overline{a4251}$ หรือ $\overline{a7624}$ หรือ $\overline{a3620}$ เป็นต้น

ผลบวกของเลขโดด 4 ตัว (ยังไม่รวมหลักหมื่น) จะเป็นไปได้ 3 แบบคือ

แบบที่ 1 หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 0

เช่น $\overline{a4251}$ แล้ว $4+2+5+1 = 12$ ซึ่งหารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 0

แบบที่ 2 หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

เช่น $\overline{a7624}$ แล้ว $7+6+2+4 = 19$ ซึ่งหารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

แบบที่ 3 หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 2

เช่น $\overline{a3620}$ แล้ว $3+6+2+0 = 11$ ซึ่งหารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 2

เนื่องจาก เราทราบว่า "จำนวนห้าหลักจะหารด้วย 3 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ ผลบวกของเลขโดดทุกตัวหารด้วย 3 ลงตัว"

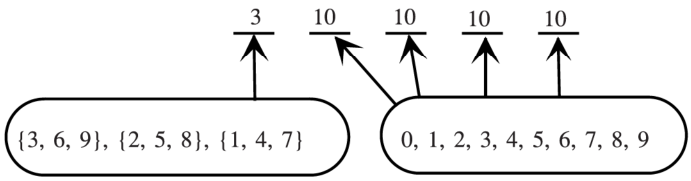
ถ้าเป็นแบบที่ 1 แล้ว a จะเลือกได้ 3 วิธี คืออาจจะเป็น 3, 6, 9

ถ้าเป็นแบบที่ 2 แล้ว a จะเลือกได้ 3 วิธี เช่นกัน คืออาจจะเป็น 2, 5, 8

ถ้าเป็นแบบที่ 3 แล้ว a จะเลือกได้ 3 วิธี เช่นกัน คืออาจจะเป็น 1, 4, 7

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าจะเป็นแบบใดก็ตาม ค่าของ a ซึ่งอยู่ในหลักหมื่น จะเลือกได้ 3 วิธีเสมอ

ขั้นที่ 5 หลักหมื่น คือ a เลือกเลขโดด 1 ตัว จาก 3 ตัว เลือกได้ 3 วิธี จาก {3, 6, 9}, {2, 5, 8}, {1, 4, 7}(แบบใดแบบหนึ่ง)



ดังนั้นโดยกฎการคูณ จะมีจำนวนนับห้าหลักที่หารด้วย 3 ลงตัวทั้งหมด $3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 30{,}000$ จำนวน

หมายเหตุ ในวิธีนี้ เราจะไปเริ่มที่หลักหมื่นก่อนไม่ได้ เพราะจะทำให้หลักสุดท้ายที่จะเลือกว่าเป็นจำนวนใดนั้น ไม่ได้เลือกได้ 3 วิธีเท่ากันทั้ง 3 แบบ แบบที่ 1 จะเลือกได้ 4 วิธีคือ 0, 3, 6, 9 แบบที่ 2 จะเลือกได้ 3 วิธีคือ 2, 5, 8 และ แบบที่ 3 จะเลือกได้ 3 วิธีคือ 1, 4, 7

ซึ่งถ้าไปเริ่มที่หลักหมื่นก่อน จะต้องแบ่งกรณี ออกเป็น 3 กรณี (หรือ 2 กรณี ถ้ารวมแบบที่ 2 กับแบบที่ 3 เข้าด้วยกัน) ดังนั้นจะต้องพึงระวังลำดับขั้นตอนในการเลือกตรงจุดนี้ด้วย

หาว่าจำนวนห้าหลักที่เป็นพหุคูณของ 3 และไม่มีเลขโดด 3 อยู่เลย มีทั้งหมดกี่จำนวน

พิจารณาจำนวนห้าหลักในรูป $\overline{abcde}$

ขั้นที่ 1 หลักหมื่น คือ a เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 8 ตัวคือ 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 เลือกได้ทั้งหมด 8 วิธี

ขั้นที่ 2 หลักพัน คือ b เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 9 ตัวคือ 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 เลือกได้ทั้งหมด 9 วิธี

ขั้นที่ 3 หลักร้อย คือ c เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 9 ตัวคือ 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 เลือกได้ทั้งหมด 9 วิธี

ขั้นที่ 4 หลักสิบ คือ d เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 9 ตัวคือ 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 เลือกได้ทั้งหมด 9 วิธี

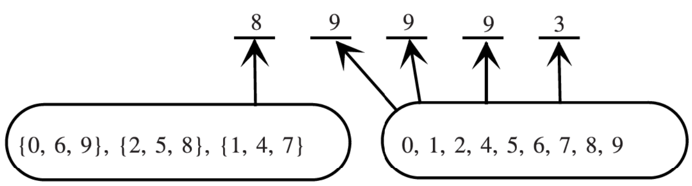
ขั้นที่ 5 ในทำนองเดียวกันกับวิธีคิดที่ผ่านมา ตอนนี้จะได้จำนวน 5 หลัก เช่น $\overline{4569e}$, $\overline{1360e}$, $\overline{7505e}$ ซึ่งผลบวกของเลขโดด 4 ตัวแรก (ยังไม่รวม e) อาจจะหารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 0, 1, 2 ตามลำดับ

ถ้าเป็นแบบที่ 1 แล้ว e เลือกได้ 3 วิธี คือ 0, 6, 9

ถ้าเป็นแบบที่ 2 แล้ว e เลือกได้ 3 วิธี คือ 2, 5, 8

ถ้าเป็นแบบที่ 3 แล้ว e เลือกได้ 3 วิธี คือ 1, 4, 7

จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเป็นแบบใดก็ตาม ค่าของ e จะเลือกได้ 3 วิธีเสมอ



ดังนั้นโดยกฎการคูณ จะมีจำนวนนับห้าหลักที่หารด้วย 3 ลงตัวและไม่มีเลขโดด 3 อยู่เลย ทั้งหมด $8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3 = 17{,}496$ จำนวน

$\therefore$ จำนวนห้าหลักทั้งหมดซึ่งเป็นพหุคูณของ 3 และมีเลขโดดของมันเท่ากับ ‘3’ อย่างน้อย 1 ตัว จะมีทั้งสิ้น $30{,}000 - 17{,}496 = 12{,}504$ จำนวน

9. **ตอบ** 8 ตารางเซนติเมตร

แนวคิด	สำหรับรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ ที่มีส่วนสูงเท่ากัน อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองจะเท่ากับอัตราส่วนของฐาน