## TEMIC 2008

# Elementary Mathematics International Contest

## เฉลยละเอียดข้อสอบประเภททีม

1. **ตอบ** 42,857

**แนวคิด** กระจาย P และ Q ให้อยู่ในรูปผลคูณของ N จากนั้นตั้งสมการตามเงื่อนไข

สมมติให้ $N = \overline{abcde}$

จะได้ $P = \overline{abcde1} = \overline{abcde} \times 10 + 1 = 10N + 1$

และ $Q = \overline{1abcde} = 100000 + \overline{abcde} = 100000 + N$

แต่โจทย์กำหนดให้ $P = 3Q$

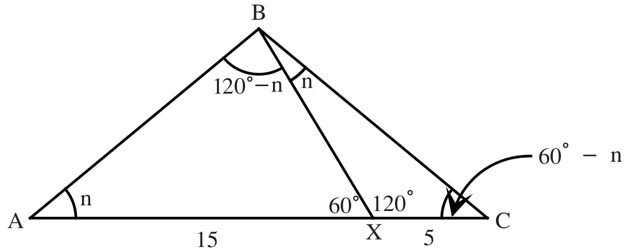
$$\therefore \quad 10N + 1 = 3(100000 + N)$$
$$10N + 1 = 300000 + 3N$$
$$10N - 3N = 300000 - 1$$
$$7N = 299999$$
$$N = \frac{299999}{7} = 42857$$

2. **ตอบ** 10

**แนวคิด** ใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

เนื่องจาก $\angle AXB = 60^\circ$ แต่ $\angle ABC = 2\angle AXB$

ดังนั้น $\angle ABC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$ และ $\angle BXC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ด้วย



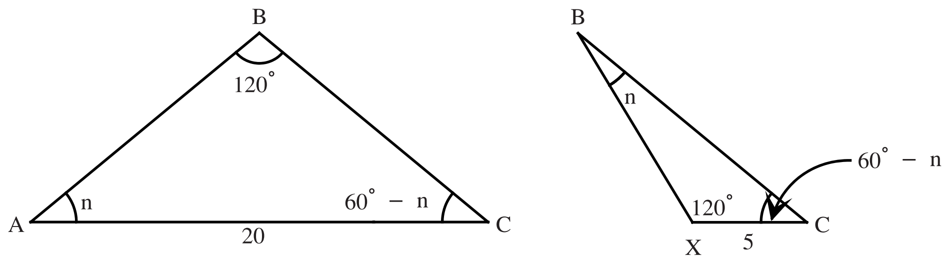
สมมติให้ $\angle CBX = n$

ดังนั้นใน $\Delta BXC$ จะได้ $\angle XCB = 180^\circ - n - 120^\circ = 60^\circ - n$

แต่ $\angle ABC = 120^\circ$ ดังนั้น $\angle ABX = 120^\circ - n$

และสุดท้าย ใน $\Delta BAX$ จะได้ $\angle BAX = 180^\circ - 60^\circ - (120^\circ - n) = 120^\circ - 120^\circ + n = n$

เมื่อพิจารณาค่าของมุมต่าง ๆ จะเห็นว่า $\Delta ABC \sim \Delta XBC$ เพราะว่ามีมุมภายในทั้งสามมุมเท่ากันมุมต่อมุม ดังรูป

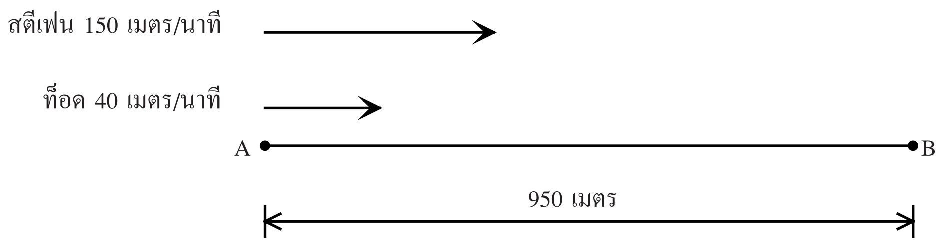



โดยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนของด้านที่ตรงข้ามมุมที่เท่ากัน จะมีค่าเท่ากัน

ดังนั้นจะได้ว่า
$$\frac{BC}{XC} = \frac{AC}{BC}$$
$$\frac{BC}{5} = \frac{20}{BC}$$
$$BC^2 = 5 \times 20$$
$$BC^2 = 100 = 10^2$$
$$BC = 10$$

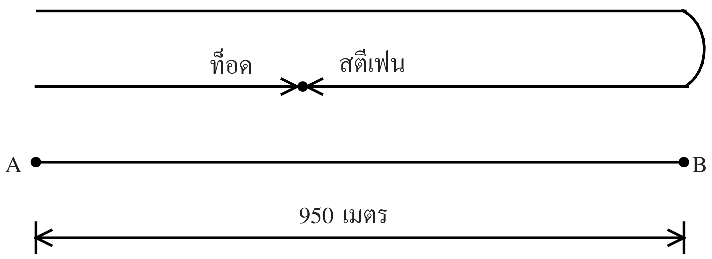
3. **ตอบ** 7

| **แนวคิด** | ถ้าคนทั้งสองพบกันจากในทิศตรงข้ามกัน แสดงว่าผลรวมของระยะทางที่คนทั้งสองเดินทางได้จะเป็นจำนวนคู่เท่าของความยาวเส้นทาง |
|---|---|




จากรูปหลังจากที่ท็อดและสตีเฟนเริ่มต้นออกเดินทางพร้อมกันจากจุด A เนื่องจากสตีเฟนวิ่งได้เร็วกว่าท็อด ดังนั้นสตีเฟนจะไปถึงที่จุด B ก่อน (วิ่งครบ 950 เมตร)

แล้วเริ่มต้นวิ่งย้อนกลับไปที่จุด A (ขวาไปซ้าย) ซึ่งก็จะไปพบกับท็อดซึ่งกำลังวิ่งจากซ้ายไปขวาพอดี ณ ตอนนี้เราจะได้ความสัมพันธ์ว่า ระยะทางทั้งหมดที่ท็อดวิ่งได้รวมกับระยะทางทั้งหมดที่สตีเฟนวิ่งได้ จะเท่ากับ $950+950$ เมตร หรือ $2\times 950$ เมตร พอดี




และเนื่องจากอัตราส่วนของความเร็วสตีเฟนต่ออัตราเร็วของท็อด เท่ากับ $\frac{150}{40} = 3\frac{3}{4}$ ซึ่งหมายความว่า ถ้าสตีเฟนวิ่งไป $3\frac{3}{4}$ รอบ แล้วท็อดเพิ่งจะวิ่งได้ครบ 1 รอบ

ดังนั้นหลังจากที่สตีเฟนวิ่งสวนทางกับท็อดในครั้งที่ 1 แล้ว เขาก็วิ่งต่อไปจนถึงจุด A (ครบ 2 รอบ) ในขณะที่ท็อดยังวิ่งต่อไปที่จุด B ซึ่งสตีเฟนก็ไล่ท็อดทันและแซงไปจนถึงจุด B ก่อน (ครบ 3 รอบ) แล้ววิ่งย้อนกลับมาสวนกับท็อดเพื่อไปที่จุด A อีกครั้ง ณ จุดที่คนทั้งสองวิ่งสวนกันครั้งที่ 2 นี้ ระยะทางทั้งหมดที่วิ่งรวมกันจะเป็น 4 รอบของ 950 เมตร หรือ $4\times 950$ นั่นเอง

ความสัมพันธ์ก็จะเป็นเช่นนี้เรื่อยไป มาเริ่มการคำนวณ
ให้ $t$ แทน เวลานับตั้งแต่คนทั้งสองเริ่มวิ่งจนกระทั่งสวนกัน
จากสูตร ระยะทาง $=$ อัตราเร็ว $\times$ เวลา หรือ $s = vt$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป $t$ นาที ท็อดจะวิ่งได้ระยะทาง $40t$ เมตร
เมื่อเวลาผ่านไป $t$ นาที สตีเฟนจะวิ่งได้ระยะทาง $150t$ เมตร

**การพบกันครั้งที่ 1**
$$40t+150t = 2\times 950$$
$$190t = 2\times 950$$
$$t = \frac{2\times 950}{190} = 10$$

นั่นคือ คนทั้งสองจะพบกันครั้งที่ 1 เมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที

**การพบกันครั้งที่ 2**
$$40t+150t = 4\times 950$$
$$190t = 4\times 950$$
$$t = \frac{4\times 950}{190} = 20$$

นั่นคือ คนทั้งสองจะพบกันครั้งที่ 2 เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที

จะเห็นได้ว่าการพบกันครั้งที่ 3, 4, ... ก็จะเป็นเมื่อเวลาผ่านไป 30, 40, ... แต่คนทั้งสองวิ่งเป็นเวลา 90 นาที แสดงว่า เขาจะพบกันทั้งสิ้น 9 ครั้ง เมื่อเวลาผ่านไป 10, 20, 30, ... , 90 นาที ตามลำดับ

ต่อไปมาพิจารณาตำแหน่งที่พบกัน ในที่นี้จะพิจารณาจากท็อด

**ครั้งที่ 1** $t = 10$ แล้วแสดงว่าท็อดเดินทางได้ $s = vt = 40 \times 10 = 400$ เมตร (จากจุด A)

$\therefore$ จะอยู่ห่างจุด B เท่ากับ $950 - 400 = 550$ เมตร

**ครั้งที่ 2** $t = 20$ , ท็อดเดินทางได้ $40 \times 20 = 800$ (จากจุด A)

$\therefore$ จะอยู่ห่างจุด B เท่ากับ $950 - 800 = 150$ เมตร

**ครั้งที่ 3** $t = 30$ , ท็อดเดินทางได้ $40 \times 30 = 1200 = 950 + 250$ เมตร

(เดินครบ 1 รอบและกำลังย้อนกลับไปที่จุด A)

$\therefore$ จะอยู่ห่างจุด B เท่ากับ 250 เมตร

**ครั้งที่ 4** $t = 40$ , ท็อดเดินทางได้ $40 \times 40 = 1600 = 950 + 650$ เมตร

$\therefore$ จะอยู่ห่างจุด B เท่ากับ 650 เมตร

**ครั้งที่ 5** $t = 50$ , ท็อดเดินทางได้ $40 \times 50 = 2000 = 950 + 950 + 100$ เมตร

$\therefore$ จะอยู่ห่างจุด B เท่ากับ $950 - 100 = 850$ เมตร

**ครั้งที่ 6** $t = 60$ , ท็อดเดินทางได้ $40 \times 60 = 2400 = 950 + 950 + 500$ เมตร

$\therefore$ จะอยู่ห่างจุด B เท่ากับ $950 - 500 = 450$ เมตร

**ครั้งที่ 7** $t = 70$ , ท็อดเดินทางได้ $40 \times 70 = 2800 = 950 + 950 + 900$ เมตร

$\therefore$ จะอยู่ห่างจุด B เท่ากับ $950 - 900 = 50$ เมตร

**ครั้งที่ 8** $t = 80$ , ท็อดเดินทางได้ $40 \times 80 = 3200 = 3 \times 950 + 350$ เมตร

$\therefore$ จะอยู่ห่างจุด B เท่ากับ 350 เมตร

**ครั้งที่ 9** $t = 90$ , ท็อดเดินทางได้ $40 \times 90 = 3600 = 3 \times 950 + 750$ เมตร

$\therefore$ จะอยู่ห่างจุด B เท่ากับ 750 เมตร

จะเห็นว่าการพบกันครั้งที่ 7 จะอยู่ห่างจากจุด B น้อยที่สุด

4. **ตอบ** $\frac{5}{7}$

**แนวคิด** $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$ และ ผลบวกของคูณที่ต้องการ จะหาได้จากการนำจำนวนในแต่ละกลุ่มมารวมกันก่อน แล้วค่อยนำมาคูณกัน

ลองพิจารณาปัญหาง่าย ๆ ก่อนดังนี้

ถ้า จำนวนในกลุ่ม A มี 2 ตัว คือ $a_1$, $a_2$

จำนวนในกลุ่ม B มี 2 ตัว คือ $b_1$, $b_2$

จำนวนในกลุ่ม C มี 2 ตัว คือ $c_1$, $c_2$

สมมติว่าต้องการหาผลบวกของ $2\times2\times2 = 8$ ผลคูณ ได้แก่

$$a_1b_1c_1+a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_1b_2c_2+a_2b_1c_1+a_2b_1c_2+a_2b_2c_1+a_2b_2c_2$$

ผลบวกดังกล่าวนี้ จะเท่ากับผลลัพธ์จากการกระจาย $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$ เพราะว่าในแต่ละวงเล็บจะต้องนำไปคูณกับวงเล็บที่เหลือ ซึ่งผลคูณของแต่ละตัว จะอยู่ในรูปของ $a_ib_jc_k$ เสมอ

ดังนั้นปัญหาในข้อนี้ ผลบวกทั้งหมดของ 80 ผลคูณ $(4\times4\times5 = 80)$ จะเท่ากับ

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}\right)\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}\right)(2.82+2.76+2.18+2.24)$$

แต่
$$\begin{aligned}\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42} &= \frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{7}\\ &= \frac{5}{14}\end{aligned}$$

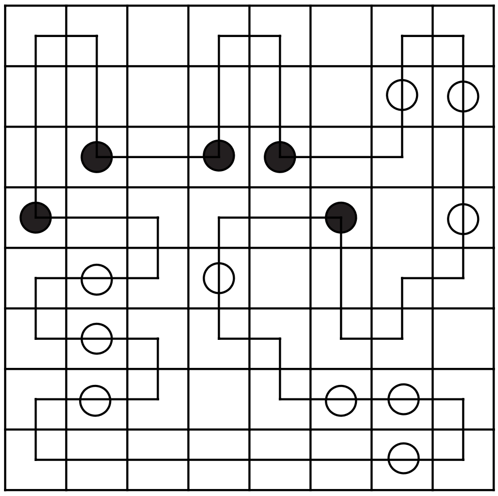
และ
$$\begin{aligned}\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80} &= \frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\frac{1}{8\times10}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

และ $2.82+2.76+2.18+2.24 = 10.00$

$$\therefore\ (\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42})(\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80})(2.82+2.76+2.18+2.24)$$

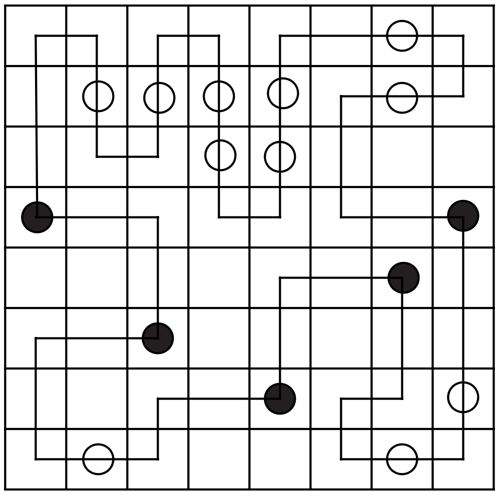
$$=\ \frac{5}{14}\times\frac{1}{5}\times 10\ =\ \frac{5}{7}$$

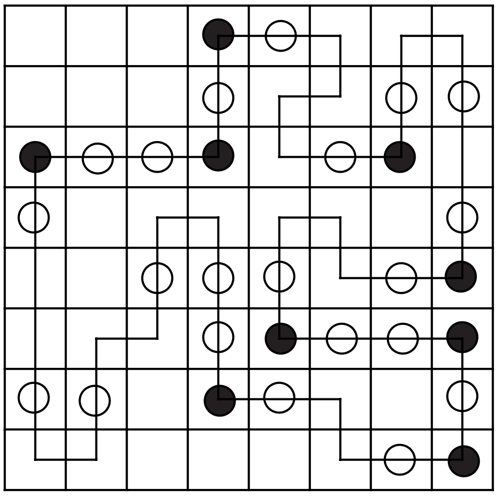
5. **ตอบ**



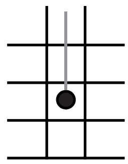
**แนวคิด** ฝึกเล่นเกม Masyu โดยต้องทำความเข้าใจกติกาให้กระจ่างก่อน

ปัญหาในข้อนี้ เป็นเกมที่รู้จักกันในชื่อว่า Masyu สิ่งที่ยากสำหรับผู้ที่ไม่เคยเล่นก็คือ การทำความเข้าใจกับกฎกติกาให้ดี เพราะโจทย์ในข้อนี้ให้เพียงแต่กฎมา แต่ไม่ให้ตัวอย่างคำตอบที่ถูกต้องมา ทำให้ชวนงงยิ่งนัก ดังนั้นในเบื้องต้นจะขอยกตัวอย่างรูปคำตอบการเขียนที่ถูกต้องของเกมนี้เสียก่อน เช่น

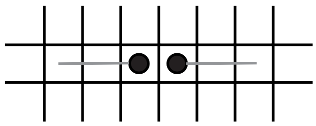


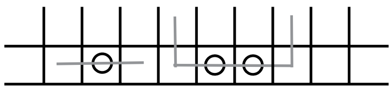


หลังจากที่ศึกษารูป จนแน่ใจว่าเข้าใจกติกาถูกต้องแล้ว ก็อาจจะลองทำด้วยตัวเองเลย หรือจะลองศึกษาเทคนิคการเล่นขั้นพื้นฐานซึ่งผู้เขียนได้หยิบยกมาจากเว็บไซต์ wikihow ดังนี้

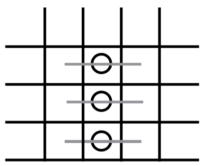


- ถ้ามีวงกลมสีดำหนึ่งวงซึ่งอยู่ที่ขอบหรืออยู่ห่างจากขอบ 1 ช่อง ให้ลากเส้นตรงไปยังจุดศูนย์กลาง
- ถ้ามีวงกลมสีดำสองวงติดกัน จะต้องลากห่างออกจากกัน

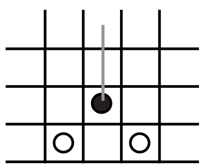




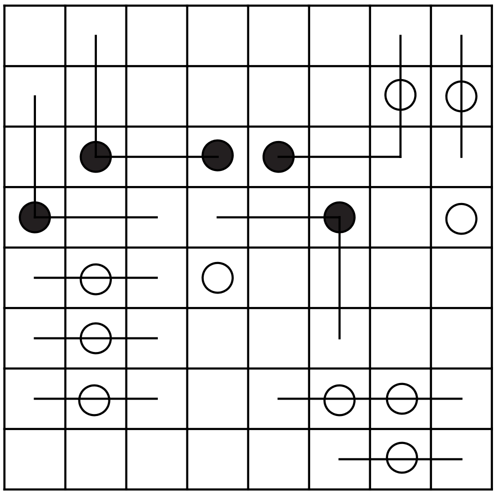
- ถ้ามีวงกลมสีขาวหนึ่งวงอยู่ที่ขอบ จะต้องลากให้ขนานกับขอบ แต่ถ้ามีวงกลมสีขาวสองวงติดกันที่ขอบจะต้องลากผ่านทั้งสองวงแล้วเลี้ยวทันที



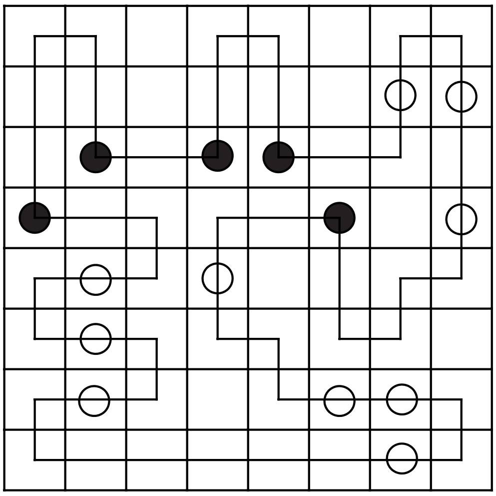
- ถ้ามีวงกลมสีขาวติดกันสามวงขึ้นไป เราอาจจะลากซิกแซกพร้อมกันผ่านวงกลมทั้งสามได้ แต่ถ้าทำไม่ได้ก็ต้องแยกไปคนละเส้น
- ถ้ามีวงกลมสีดำหนึ่งวง อยู่ในแนวทแยงของวงกลมสีขาวสองวงใด ๆ ที่อยู่ในแถวหรือหลักเดียวกัน ให้ลากห่างจากออกวงกลมสีขาวทั้งสอง



ดังนั้นในเบื้องต้น โจทย์ของเราก็อาจจะเริ่มต้นคร่าว ๆ ดังนี้

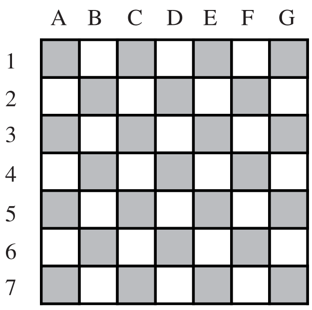


เมื่อลองพยายามเชื่อมโยงให้ได้ตามกฎก็จะได้ดังรูป ซึ่งเป็นคำตอบ



6. **ตอบ** 1,584

**แนวคิด** แบ่งกรณีเป็นกลุ่มสีดำกับกลุ่มสีขาว และในแต่ละกลุ่มยังแบ่งเป็น 2 พวก



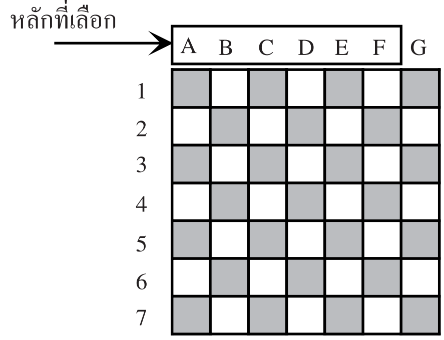
จากรูป จะเห็นว่าตารางหมากฮอสจะแบ่งเป็น 2 กลุ่มคือสีดำกับสีขาว ดังนั้นเราจะแยกพิจารณาออกเป็น 2 กรณีใหญ่ๆ

**กรณีที่ 1** วางตัวหมากฮอสบนช่องสีดำ
เมื่อพิจารณาช่องสีดำในแต่ละหลักคือ หลัก A, B, C, D, E, F, G จะพบว่าจำนวนช่องจะเท่ากับ 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4 ตามลำดับ แสดงว่า ในหลักทั้งเจ็ดนี้ ยังแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่มี 4 ช่อง ได้แก่ A, C, E, G และกลุ่มที่มี 3 ช่อง ได้แก่ B, D, F

แต่เนื่องจากเราต้องการวางตัวหมากฮอสเพียง 6 ตัว แสดงว่าตัวหมากฮอสจะต้องวางลงบน 6 หลักเท่านั้น เราจึงแบ่งกรณีที่จะพิจารณาอีกออกเป็น 2 กรณีคือ 4, 4, 4, 3, 3, 3 กับ 4, 4, 4, 4, 3, 3

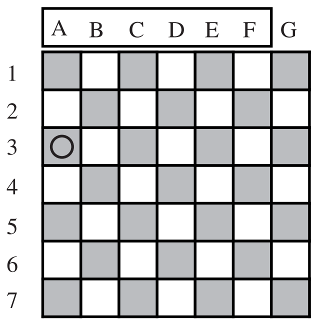
**กรณีที่ 1.1** วางตัวหมากฮอสลงบนหลักที่มีช่องเป็น 4, 4, 4, 3, 3, 3
เนื่องจากหลักที่มี 4 ช่อง มีอยู่ 4 หลัก คือ A, C, E, G เราเลือกมา 3 หลัก จะเลือกได้ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี ได้แก่ ACE, ACG, AEG, CEG สมมติว่าเลือกหลัก ACE

สำหรับหลักที่มี 3 ช่อง คือ B, D, F นั้นต้องเอามาทั้งหมดอยู่แล้ว
มาเริ่มวางตัวหมากฮอสลงบนช่องสีดำกัน

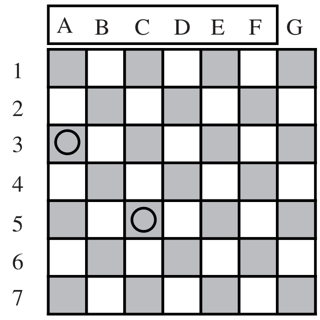


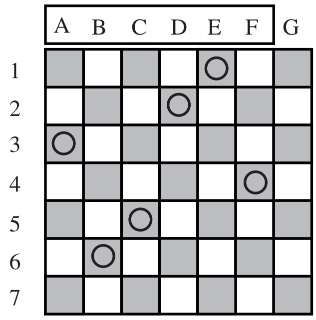

ก่อนที่จะวาง ขอให้สังเกตว่าช่องสีดำในหลักที่มี 4 ช่อง กับหลักที่มี 3 ช่อง จะอยู่เยื้องกัน ทำให้การวางตัวหมากฮอสลงในช่องที่มี 4 ช่อง ไม่มีทางที่จะอยู่ในแถวเดียวกันกับช่องที่มี 3 ช่องอยู่แล้ว เราจึงสามารถมองการวางแยกออกเป็น 2 กลุ่ม

**ขั้นที่ 1** หลัก A เลือกวาง 1 ช่อง จะเลือกได้ 4 วิธี ได้แก่ช่อง 1A, 3A, 5A, 7A สมมติว่าวางลงในช่อง 3A ดังรูป



**ขั้นที่ 2** หลัก C จะเลือกวางได้เพียง 3 วิธี คือช่อง 1C, 5C, 7C สมมติว่าวางที่ช่อง 5C





**ขั้นที่ 3** หลัก E จะเลือกวางได้ 2 วิธี สมมติว่าวางช่อง 1E

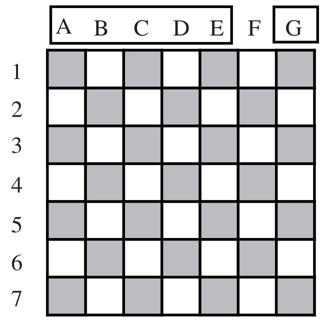
**ขั้นที่ 4, 5, 6** สำหรับหลัก B, D, F ก็ในทำนองเดียวกัน คือจะวางได้ 3, 2, 1 วิธีตามลำดับ สมมติว่าวางที่ 6B, 2D, 4F

ดังนั้นโดยกฎการคูณ ในกรณีที่ 1.1 ซึ่งวางลงบนช่อง 4, 4, 4, 3, 3, 3 นี้จะวางตัวหมากฮอสได้ทั้งหมด $\binom{4}{3} \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$ วิธี

**กรณีที่ 1.2** วางตัวหมากฮอสลงบนหลักที่มีช่องเป็น 4, 4, 4, 4, 3, 3

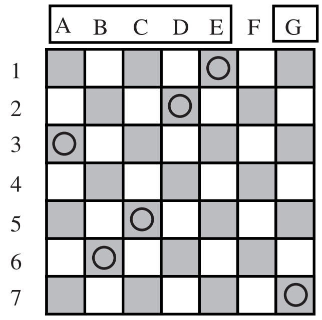
เนื่องจากหลักที่มี 3 ช่อง มีอยู่ 3 หลัก คือ B, D, F เราเลือกมา 2 หลัก จะเลือกได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี ได้แก่ BD, BF, DF สมมติว่าเลือกหลัก BD

สำหรับหลักที่มี 4 ช่อง คือ A, C, E, G นั้นต้องเอามาทั้งหมดอยู่แล้ว



**ขั้นที่ 1, 2, 3, 4** ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1.1 หลัก A, C, E, G จะวางได้ 4, 3, 2, 1 วิธีตามลำดับ

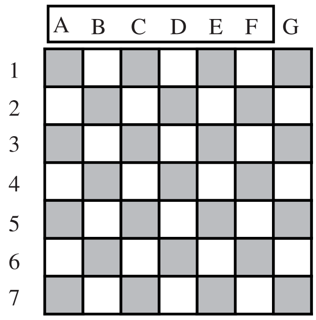
**ขั้นที่ 5, 6** หลัก B, D จะวางได้ 3, 2 วิธีตามลำดับ
สมมติว่าวางที่ตำแหน่งต่าง ๆ ดังรูป




ดังนั้นโดยกฎการคูณ ในกรณีที่ 1.2 ซึ่งวางลงบนช่อง 4, 4, 4, 4, 3, 3 นี้จะวางตัวหมากฮอสได้ทั้งหมด
$\binom{3}{2} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 = 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2$
$= 432$ วิธี
สรุปได้ว่าการวางตัวหมากฮอสบนช่องสีดำ จะวางได้ทั้งหมด $576 + 432 = 1008$ วิธี

**กรณีที่ 2** วางตัวหมากฮอสบนช่องขาว
เมื่อพิจารณาช่องขาวในแต่ละหลักคือ หลัก A, B, C, D, E, F, G จะพบว่าจำนวนช่องจะเท่ากับ 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3 ตามลำดับ แสดงว่า ในหลักทั้งเจ็ดนี้ ยังแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่มี 3 ช่อง ได้แก่ A, C, E, G และกลุ่มที่มี 4 ช่อง ได้แก่ B, D, F
แต่เนื่องจากเราต้องการวางตัวหมากฮอสเพียง 6 ตัว แสดงว่าตัวหมากฮอสจะต้องวางลงบน 6 หลักเท่านั้น เราจึงแบ่งกรณีที่จะพิจารณาอีกออกเป็น 2 กรณีคือ 3, 3, 3, 4, 4, 4 กับ 3, 3, 3, 3, 4, 4

**กรณีที่ 2.1** วางตัวหมากฮอสลงบนหลักที่มีช่องเป็น 3, 3, 3, 4, 4, 4




เนื่องจากหลักที่มี 3 ช่อง มีอยู่ 4 หลัก คือ A, C, E, G เราเลือกมา 3 หลัก จะเลือกได้
$\binom{4}{3} = 4$ วิธี ได้แก่ ACE, ACG, AEG, CEG สมมติว่าเลือกหลัก ACE
สำหรับหลักที่มี 4 ช่อง คือ B, D, F นั้นต้องเอามาทั้งหมดอยู่แล้ว

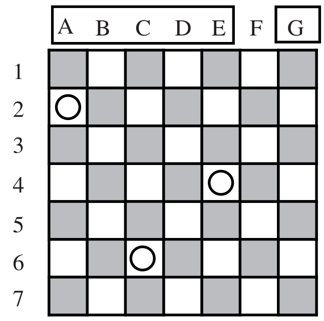
**ขั้นที่ 1, 2, 3** หลัก A, C, E จะวางได้ 3, 2, 1 วิธี ตามลำดับ

**ขั้นที่ 4, 5, 6** หลัก B, D, F จะวางได้ 4, 3, 2 วิธี ตามลำดับ

ดังนั้นโดยกฎการคูณ ในกรณีที่ 2.1 ซึ่งวางลงบนช่อง 3, 3, 3, 4, 4, 4 นี้จะวางตัวหมากฮอส ได้ทั้งหมด $\binom{4}{3} \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 = 576$ วิธี

**กรณีที่ 2.2** วางตัวหมากฮอสลงบนหลักที่มีช่องเป็น 3, 3, 3, 3, 4, 4

สมมติว่าวางในช่อง A, B, C, D, E, G




ถ้าลองวางในหลัก A, C, E อย่างละ 1 ตัวลงไป ดังรูป จะเห็นว่าหลักสุดท้ายคือหลัก G จะไม่สามารถวางได้ ถ้าวางลงไป ก็จะต้องอยู่ในแถวเดียวกับ A, C, E แน่นอน ดังนั้นกรณีนี้จึงเป็นไปไม่ได้

สรุปได้ว่าการวางตัวหมากฮอสบนช่องสีขาว จะวางได้ 576 วิธี เท่านั้น

**รวมคำตอบทั้งสองกรณี จะได้ $1008 + 576 = 1584$ วิธี**

7. **ตอบ** 670

| **แนวคิด** | ถ้าต้องการเลือกมาให้ได้เยอะที่สุด ก็ต้องเลือกจำนวนที่ห่างกันน้อยที่สุด เท่าที่จะน้อย |
|---|---|

สมมติให้ a, b เป็นจำนวนสองจำนวนใด ๆ ที่เลือกมาจากจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4, … , 2006, 2007, 2008

เราอาจจะสมมติให้ $a > b$ เสมอ

จะได้ว่า ถ้า $\frac{a+b}{a-b}$ เป็นจำนวนเต็ม(หารลงตัว) จำนวนทั้งสองคือ a กับ b ก็จะไม่สามารถอยู่ในกลุ่มเดียวกันได้ และถ้าต้องการเลือกมาให้ได้เยอะที่สุด ค่าของ a กับ b ก็ต้องอยู่ห่างกันน้อยที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ ดังนั้นจะสามารถแบ่งการพิจารณาโดยเริ่มต้นจากกรณีที่ a กับ b อยู่ห่างกันน้อยที่สุดก่อน คือ $a - b = 1$

**กรณีที่ 1** $a - b = 1$

จากสมการข้างต้น จะได้ $a = b + 1$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{(b+1)+b}{1} = 2b+1$$

เนื่องจาก $2b+1$ เป็นจำนวนเต็มเสมอ แสดงว่ากรณีที่ $a - b = 1$ ซึ่งหมายความว่าจำนวนสองจำนวนที่เลือกนั้นอยู่ติดกัน จะเลือกมาไม่ได้ เช่น 3 กับ 4 จะเลือกมาพร้อมกันไม่ได้ ($\frac{4+3}{4-3} = 1$) จึงต้องพิจารณากรณีที่ a กับ b ห่างกันมากขึ้นกว่าเดิม

**กรณีที่ 2** $a-b=2$

จากสมการข้างต้น จะได้ $a=b+2$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{(b+2)+b}{2} = \frac{2b+2}{2} = \frac{2b}{2}+\frac{2}{2} = b+1$$

เนื่องจาก $b+1$ เป็นจำนวนเต็มเสมอ แสดงว่ากรณีที่ $a-b=2$ เช่น 3 กับ 5 จะเลือกมาพร้อมกันไม่ได้ ($\frac{5+3}{5-3}=4$)

**กรณีที่ 3** $a-b=3$

จากสมการข้างต้น จะได้ $a=b+3$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{(b+3)+b}{3} = \frac{2b+3}{3} = \frac{2b}{3}+\frac{3}{3} = \frac{2}{3}\times b+1$$

จะเห็นว่า ถ้า b หารด้วย 3 ไม่ลงตัว แล้วค่าของ $\frac{2}{3}\times b+1$ ก็จะไม่เป็นจำนวนเต็ม (หารไม่ลงตัว) ซึ่งเป็นสิ่งที่เราต้องการนั่นเอง ดังนั้นการเลือกจำนวนมาให้ได้มากที่สุดจะต้องเลือกจำนวนที่อยู่ห่างกันอย่างมากที่สุดก็คือ 3 เสมอ

ถ้าตัวแรกที่เลือกคือ 1 จะได้จำนวนถัดไปคือ $1+3=4$, จำนวนถัดไปคือ $4+3=7$, ... (ให้สังเกตว่า $\frac{4+1}{4-1}=\frac{5}{3}$ , $\frac{7+1}{7-1}=\frac{8}{6}$, $\frac{7+4}{7-3}=\frac{11}{4}$ จะไม่มีคู่ใดเลยที่ ผลบวกหารด้วยผลต่างลงตัว)

ดังนั้นจะได้ลำดับของจำนวนที่เลือกคือ

1, 4, 7, 10, ...

ให้สังเกตว่า จำนวนในลำดับนี้ จะหารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1 เสมอ แสดงว่าจำนวนสุดท้ายในลำดับนี้จะเท่ากับ 2008 (ซึ่งหารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1 เช่นกัน)

1, 4, 7, 10, ... , 2008

แล้วมีทั้งหมดกี่จำนวน? ถ้านำแต่ละจำนวนบวกด้วย 2 จะได้

3, 6, 9, 12, ... , 2010

จากนั้นนำแต่ละจำนวนไปหารด้วย 3 จะได้

1, 2, 3, 4, ... , 670

เห็นได้ชัดว่ามีทั้งสิ้น 670 จำนวน ดังนั้นจำนวนในลำดับ 1, 4, 7, 10, ... , 2008 ก็จะมีทั้งสิ้น 670 จำนวน เช่นกัน

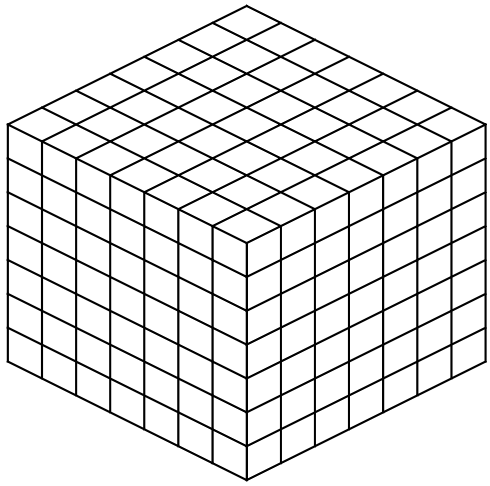
และเนื่องจากตัวแรกที่เราเลือกคือ 1 ตัวสุดท้ายที่เลือกคือ 2008 พอดี ดังนั้น 670 จึงเป็นจำนวนที่มากที่สุดเท่าที่จะเลือกมาด้วยกันได้ ข้อนี้จึงตอบ 670

**หมายเหตุ**

- ถ้าตัวแรกที่เลือกคือ 2 จะได้ตัวถัดไปคือ $2+3 = 5, \ldots$ ก็จะได้ลำดับ 2, 5, 8, 11, … , 2006 ซึ่งเป็นกลุ่มของจำนวนที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 2 ซึ่งจะมีทั้งสิ้น 669 จำนวน น้อยกว่า 670
- ตัวแรกที่เลือก เป็น 3 ไม่ได้ เพราะ ๖ ต้องหารด้วย 3 ไม่ลงตัว

**8. ตอบ** 71

| **แนวคิด** | ใช้หน้าตัด 7 ชั้น เพื่อตรวจสอบการนับจำนวนลูกบาศก์ในการจัดวางแบบต่าง ๆ |
|---|---|



ลูกบาศก์ขนาด $7\times7\times7$ มีปริมาตรเท่ากับ $7\times7\times7 = 343$ ลูกบาศก์หน่วย

จากรูปสามมิติ ลูกบาศก์ขนาด $4\times4\times4$ อย่างมากก็ตัดได้ 1 ลูก ลูกบาศก์ขนาด $3\times3\times3$ อย่างมากก็ตัดได้ 8 ลูก ถ้าตัดลูกบาศ์ขนาด $3\times3\times3$ ทั้ง 8 ลูกเลย ก็จะไม่มีลูกบาศก์ขนาด $4\times4\times4$ และ $2\times2\times2$ ลูกบาศก์ขนาด $3\times3\times3$ จำนวน 1 ลูก มีปริมาตร 27 ลูกบาศก์หน่วย ดังนั้นถ้าใช้ทั้ง 8 ลูก ก็จะมีปริมาตร $8\times27 = 216$ แล้ว $343-216 = 127$

$$\therefore\ 7^3 = 8\times3^3+127\times1^3$$

ถ้าเป็นการตัดแบบนี้ ก็จะมีลูกบาศก์ทั้งหมด $8+127 = 135$ ลูก ซึ่งมากไป

การตัดลูกบาศก์ออกเป็นส่วน ๆ ก็เหมือนกับการนำลูกบาศก์ที่ตัดแล้วไปประกอบขึ้นเป็นลูกใหญ่ ต่อไปนี้ ผู้เขียนจะคิดว่าเป็นการพยายามประกอบลูกบาศก์จากลูกเล็กเพื่อให้ได้ลูกใหญ่ขนาด $7\times7\times7$ แทน

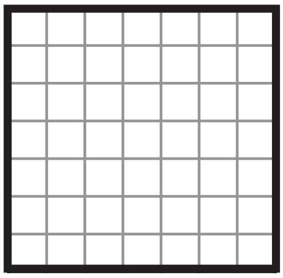
เราควรจะใส่ลูกบาศก์ขนาด $4\times4\times4$ ลงไปด้วย 1 ลูก ในขณะเดียวกัน ถ้าใส่ลูกบาศก์ขนาด $3\times3\times3$ มากไปคือใส่ทั้ง 7 ลูก ก็จะไม่มีช่องว่างสำหรับลูกบาศก์ขนาด $2\times2\times2$ อีกเช่นเคย ถ้าเป็นแบบนี้จะได้ $7^3 = 1\times4^3+7\times3^3+90\times1^3$ แล้วแสดงว่าจะมีลูกบาศก์ทั้งหมด $1+7+90 = 98$ ลูก แม้ว่าการใส่หรือประกอบแบบนี้จะน้อยลงกว่าแบบแรก แต่ก็ยังถือว่ามาก

การที่จะประกอบแล้วใช้จำนวนลูกบาศก์น้อยที่สุด จะต้องไม่ใช้ลูกบาศก์ขนาด $3\times3\times3$ มากเกินไป จะต้องพยายามเพิ่มเนื้อที่ให้ลูกบาศก์ขนาด $2\times2\times2$ มีจำนวนมากขึ้น เพื่อไปดึงปริมาตรของลูกบาศก์ขนาด $1\times1\times1$ ให้เหลือน้อยลงมากที่สุด

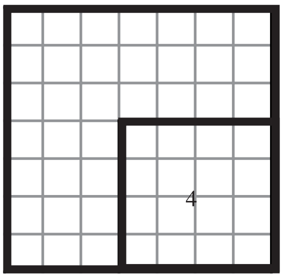
อย่างไรก็ดีการนับจำนวนลูกบาศก์ที่ตัดออกหรือคิดว่าเป็นการประกอบลูกเล็กกลับเป็นลูกใหญ่โดยใช้ภาพ 3 มิตินั้น เป็นเรื่องที่ทำความเข้าใจได้ยาก เพราะเราไม่สามารถมองเห็นภาพ 3 มิติ ได้ทุกทิศทางพร้อม ๆ กันจากภาพ 2 มิติที่เขียนลงบนกระดาษได้

การนับจำนวนลูกบาศก์ ในที่นี้จะใช้ภาพหน้าตัด 2 มิติ จำนวน 7 แผ่นในการอธิบาย โดยเป็นมองจากด้านบนลงมา แต่ละแผ่นจะแทนแต่ละชั้น โดยมีชั้นที่ 1 อยู่ล่างสุดติดกับพื้น และชั้นที่ 2, 3, 4, 5, 6, 7 วางซ้อนขึ้นไปเรื่อย ๆ

ในเบื้องต้นพิจารณาภาพหน้าตัดขนาด $7\times7$ ตารางหน่วย ดังรูป

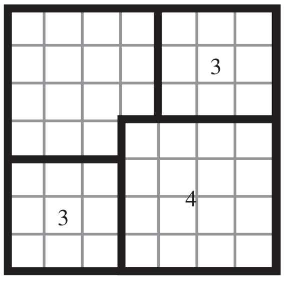


เพื่อให้ลูกบาศก์ขนาด $7\times7\times7$ มีลูกบาศก์ขนาด $4\times4\times4$, $3\times3\times3$, $2\times2\times2$ และ $1\times1\times1$ คละเคล้ากันไป ที่ชั้นที่ 1 ซึ่งเป็นพื้นนั้น เราจะพยายามวางจัตุรัสขนาด $4\times4$, $3\times3$, $2\times2$, $1\times1$ ลงไปโดยเบื้องต้นจะยึดหลักที่ว่าจะพยายามวางจัตุรัสขนาดใหญ่สุดลงไปให้มากที่สุดก่อน ดังนี้

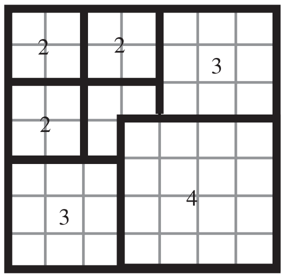



จัตุรัสขนาด $4\times4$ อย่างมากก็วางได้ 1 แผ่น เราใส่ไว้ที่มุม สมมติว่าเขียนด้วยหมายเลข 4 ดังรูป

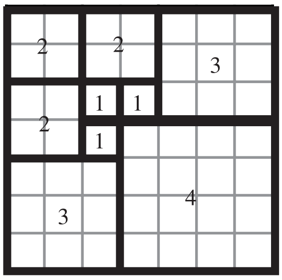
จัตุรัสขนาด $3\times3$ อย่างมากก็วางได้ 3 แผ่น แต่ถ้าวางทั้ง 3 แผ่น ก็จะไม่มีที่ให้จัตุรัสขนาด $2\times2$ วาง ดังนั้นจะวางจัตุรัสขนาด $3\times3$ เพียง 2 แผ่น ดังรูปถัดไป



จัตุรัสขนาด $2 \times 2$ อย่างมากก็วางได้ 3 แผ่น เช่นกัน

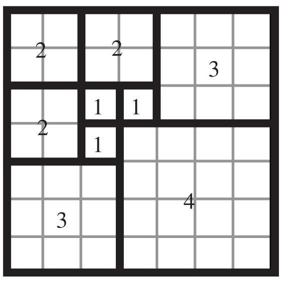


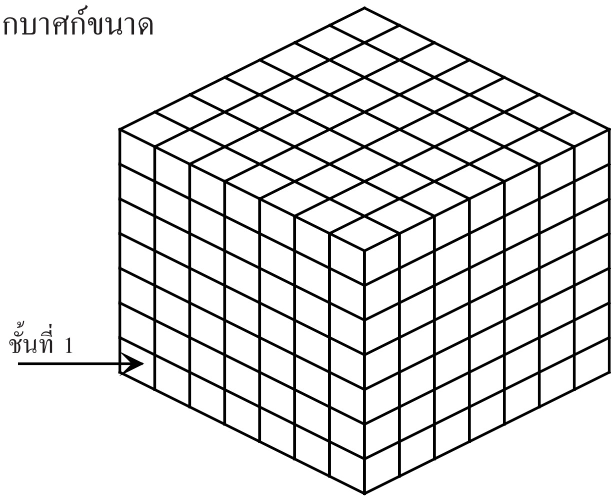

จะเห็นได้ว่าเหลืออีก 3 ช่องซึ่งจะใช้วางจัตุรัสขนาด $1 \times 1$




**รูปที่ 1** ชั้นที่ 1

ซึ่งรูปที่ 1 นี้ เราจะแทนการวางลูกบาศก์ขนาดต่าง ๆ ลงในชั้นที่ 1




**ชั้นที่ 1. (1, 2, 3, 3)**

ในตอนนี้หมายความว่า เราวางลูกบาศก์ขนาด $4 \times 4 \times 4$, $3 \times 3 \times 3$, $2 \times 2 \times 2$ และ $1 \times 1 \times 1$ ลงไปอย่างละ 1, 2, 3 และ 3 ลูก ตามลำดับ ซึ่งจะเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ว่า (1, 2, 3, 3)

ต่อไปก็มาพิจารณาชั้นที่ 2 ให้นึกว่า

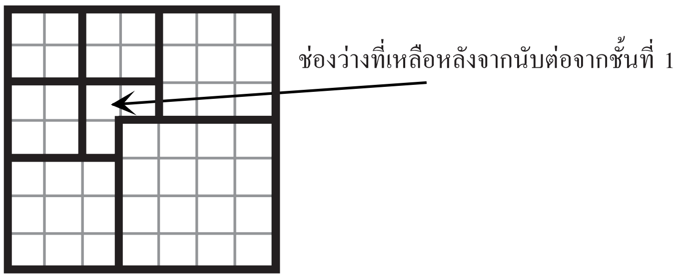
ลูกบาศก์ขนาด $4 \times 4 \times 4$ ซึ่งสูง 4 หน่วย ก็จะอยู่ต่อขึ้นไป 4 ชั้น คือ จะอยู่ในชั้นที่ 1, 2, 3, 4

ลูกบาศก์ขนาด $3 \times 3 \times 3$ ซึ่งสูง 3 หน่วย ก็จะอยู่ต่อขึ้นไป 3 ชั้น คือ จะอยู่ในชั้นที่ 1, 2, 3

ลูกบาศก์ขนาด $2 \times 2 \times 2$ ซึ่งสูง 2 หน่วย ก็จะอยู่ต่อขึ้นไป 2 ชั้น คือ จะอยู่ในชั้นที่ 1, 2

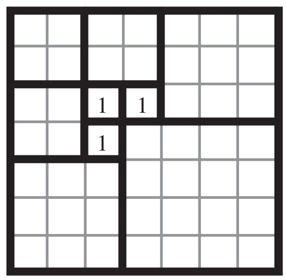
แต่สำหรับลูกบาศก์ขนาด $1 \times 1 \times 1$ นั้นสูงเพียง 1 หน่วย จะอยู่เป็นชั้น ๆ ไป ไม่มีรอยต่อข้ามไปยังชั้นต่าง ๆ

ดังนั้นในชั้นที่ 2 นี้ เราจะเขียนเฉพาะกรอบของลูกบาศก์ขนาด $4 \times 4 \times 4$, $3 \times 3 \times 3$, $2 \times 2 \times 2$ โดยไม่ใส่หมายเลข 4, 3, 2 ลงไป ซึ่งหมายความว่า ไม่มีลูกบาศก์ใหม่ที่มีขนาด $4 \times 4 \times 4$, $3 \times 3 \times 3$, $2 \times 2 \times 2$ เกิดขึ้นในชั้นนี้ เราก็จะไม่นับซ้ำ

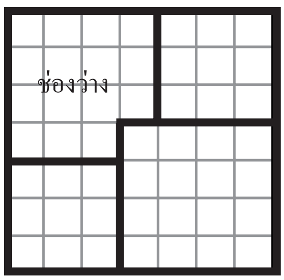



**ชั้นที่ 2**

จะเห็นว่า เมื่อเป็นเช่นนี้แล้ว ก็จะเหลือช่องว่าง 3 ช่อง รูปตัว L ที่อยู่ตรงกลาง ซึ่งเราก็จะต้องใส่ลูกบาศก์ขนาด $1 \times 1 \times 1$ จำนวน 3 ลูกลงไปได้เพียงแบบเดียว ดังรูปที่ 2 และหมายความว่าชั้นที่ 2 นี้จะได้ลูกบาศก์ขนาด $1 \times 1 \times 1$ เพิ่มขึ้นอีก 3 ลูก เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (0, 0, 0, 3)



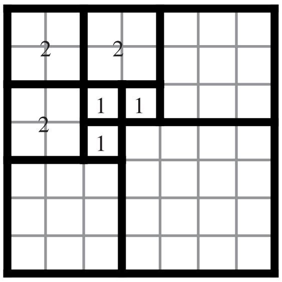

**ชั้นที่ 2. (0, 0, 0, 3)**



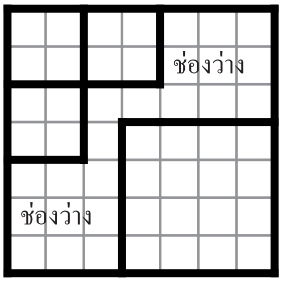

**ชั้นที่ 3**

ต่อมาชั้นที่ 3 ยังมีรอยของลูกบาศก์ขนาด $4 \times 4 \times 4$ กับ $3 \times 3 \times 3$ เท่านั้น ส่วนรอยของ $2 \times 2 \times 2$ จะหมดไป

ตำแหน่งของช่องว่างในชั้นที่ 3 ซึ่งมี 15 ช่องนี้ สามารถที่เลือกวางลูกบาศก์ได้หลายแบบ เช่นวางขนาด $3\times3\times3$ ลงไปได้ 1 ลูก หรือวางขนาด $2\times2\times2$ ลงไปได้ 3 ลูก หรือจะวางขนาด $1\times1$ ทั้งหมดเลยก็ได้ จากการลองผิดลองถูก จะพบว่าเราควรวาง $2\times2\times2$ ลงไป (ถ้าวาง $3\times3\times3$ ลงไป จะทำให้มีจำนวนลูกบาศก์ทั้งหมดรวมกันภายหลังมีค่ามาก) และสำหรับช่องว่างที่เหลือ 3 ช่องก็ใส่ $1\times1\times1$ เช่นเดิม



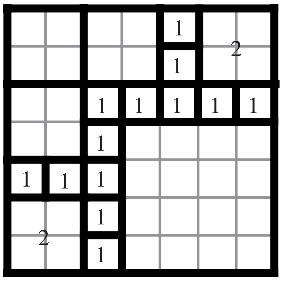

**ชั้นที่ 3. (0, 0, 3, 3)**




**ชั้นที่ 4**

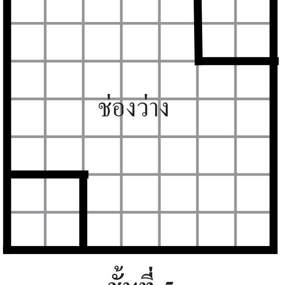
ต่อมาชั้นที่ 4 จะเหลือรอยของ $4\times4\times4$ จากชั้นที่ 1 และ $2\times2\times2$ จากชั้นที่ 2 โดยที่รอยของ $3\times3\times3$ จากชั้นที่ 1 นั้นได้หมดไปแล้ว

ช่องว่างที่เหลืออีก 21 ช่อง อาจจะวาง $3\times3\times3$ ก็ได้ แต่เราไม่วาง เพราะจากการลองผิดลองถูก จะพบว่าถ้าวาง $2\times2\times2$ ที่มุม จะให้จำนวนลูกบาศก์ทั้งหมดที่น้อยกว่า และช่องที่เหลืออีก 13 ช่อง ก็ใส่ $1\times1\times1$ เช่นเคย



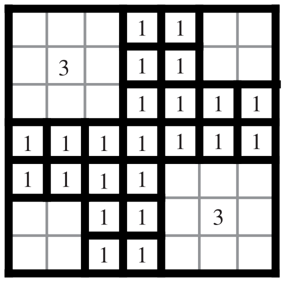

**ชั้นที่ 4. (0, 0, 2, 13)**

ต่อมาชั้นที่ 5 จะเหลือรอยของลูกบาศก์ขนาด $2\times2\times2$ จากชั้นที่ 4 เท่านั้น

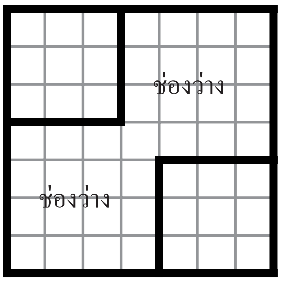



**ชั้นที่ 5**

เราเลือกใส่ลูกบาศก์ $3 \times 3 \times 3$ ตรงมุมทั้งสองเท่านั้น และที่เหลือก็ใส่ $1 \times 1 \times 1$ เช่นเคย



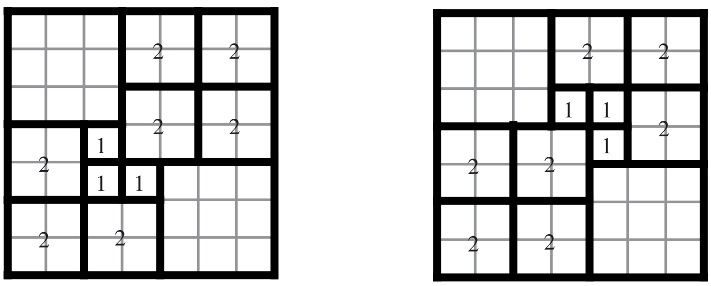
**ชั้นที่ 5. (0, 2, 0, 23)**




**ชั้นที่ 6**

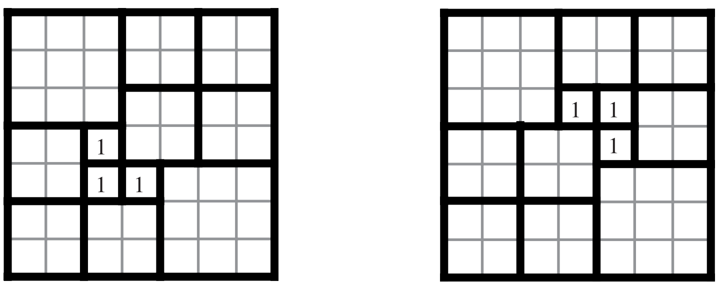
ชั้นที่ 6 จะเหลือรอยจากลูกบาศก์ขนาด $3 \times 3 \times 3$ จากชั้นที่ 5

ช่องว่างที่เหลือ จะสามารถใส่ลูกบาศก์ขนาด $2 \times 2 \times 2$ ได้เต็มที่ 7 ลูก จะวางแบบใดก็ได้ ช่องที่เหลือก็วาง $1 \times 1 \times 1$ เช่นเดิม



**ชั้นที่ 6. (0, 0, 7, 3)**

ชั้นที่ 7 ก็จะเหลือรอยจากลูกบาศก์ขนาด $3 \times 3 \times 3$ จากชั้นที่ 5 และ $2 \times 2 \times 2$ จากชั้นที่ 6 ซึ่งจะมีช่องว่างเหลืออยู่ 3 ช่อง เราก็จะเติมลูกบาศก์ขนาด $1 \times 1 \times 1$ ลงไปดังรูป



**ชั้นที่ 7. (0, 0, 0, 3)**

ดังนั้นรวม 7 ชั้น จะมีลูกบาศก์ขนาดต่าง ๆ ทั้งหมด ดังนี้

ชั้นที่ 1. (1, 2, 3, 3)

ชั้นที่ 2. (0, 0, 0, 3)

ชั้นที่ 3. (0, 0, 3, 3)

ชั้นที่ 4. (0, 0, 2, 13)

ชั้นที่ 5. (0, 2, 0, 23)

ชั้นที่ 6. (0, 0, 7, 3)

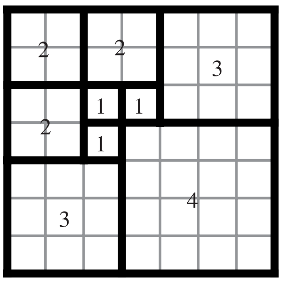
ชั้นที่ 7. (0, 0, 0, 3)

รวมทั้งหมดเป็น (1, 4, 15, 51) หรือหมายความว่า

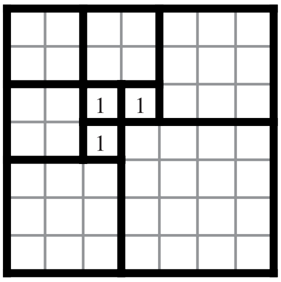
$$\begin{aligned} 7^3 &= 1\times 4^3+4\times 3^3+15\times 2^3+51\times 1^3 \\ &= 64+4\times 27+15\times 8+51\times 1 \\ &= 64+108+120+51 \\ &= 343 \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นจริงที่ $7^3 = 343$ (แสดงว่านับไม่ขาด) และได้จำนวนลูกบาศก์ขนาด $4\times 4\times 4$, $3\times 3\times 3$, $2\times 2\times 2$ และ $1\times 1\times 1$ ต่ำที่สุด รวมทั้งหมด $1+4+15+51 = 71$ ลูก

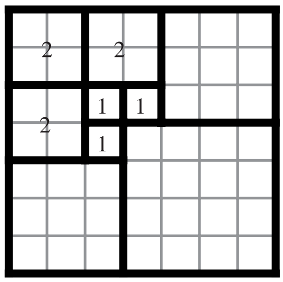
เพื่อให้ดูง่าย ๆ จะนำชั้นทั้งเจ็ดมาเรียงต่อกันดังนี้



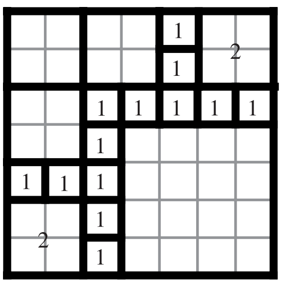

**ชั้นที่ 1**



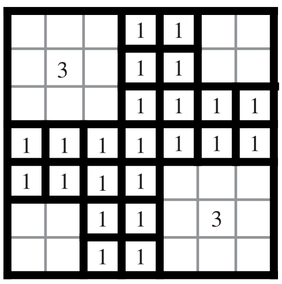

**ชั้นที่ 2**



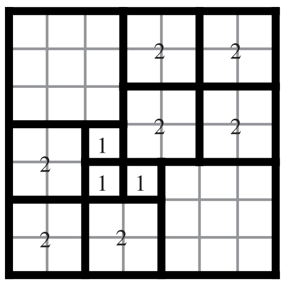

**ชั้นที่ 3**



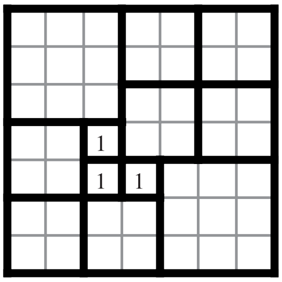

**ชั้นที่ 4**




**ชั้นที่ 5**

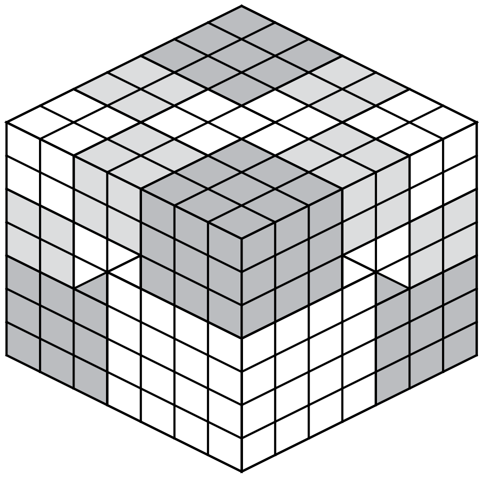



**ชั้นที่ 6**



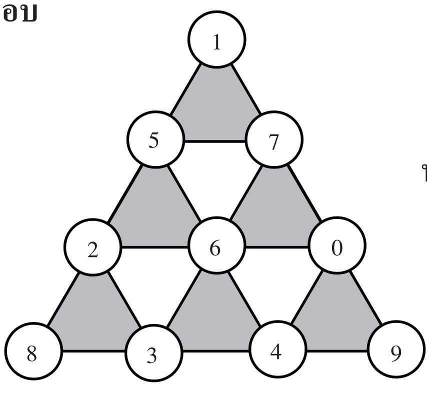

**ชั้นที่ 7**

และถ้านำมาเขียนเป็นภาพสามมิติก็จะได้ดังนี้

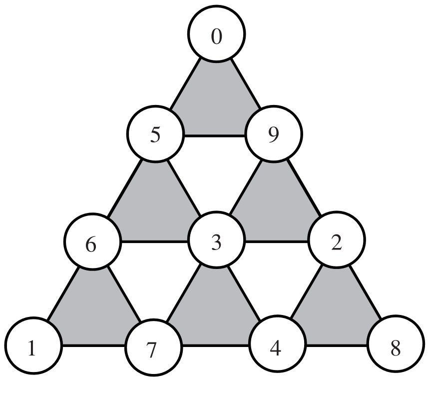


**หมายเหตุ** การจัดเรียงจัตุรัสในแบบชั้นที่ 1 นั้นมีชื่อเรียกว่า Mrs. Perkins's Quilt

9. **ตอบ**

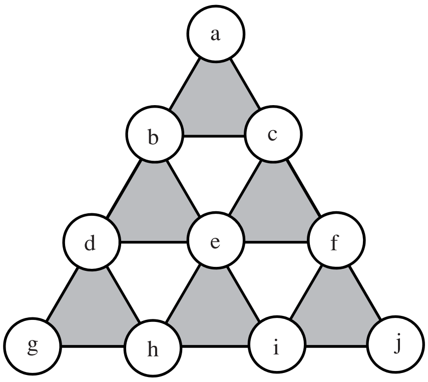



หรือ




| | |
|---|---|
| **แนวคิด** | หาขอบเขตของผลบวกที่เป็นไปได้ กับจำนวนที่อยู่ตรงกลาง เพื่อใช้ในการแบ่งกรณี |

จากรูปในหน้าถัดไป สมมติให้ S แทน ผลบวกของจำนวนในวงกลมซึ่งเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่แรเงา ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ว่า




$S = a+b+c$ ... (1)

$S = b+d+e$ ... (2)

$S = c+e+f$ ... (3)

$S = d+g+h$ ... (4)

$S = e+h+i$ ... (5)

$S = f+i+j$ ... (6)

เนื่องจาก a, b, c, d, e, f, g, h, i, j เป็นเลขโดดตั้งแต่ 0 ถึง 9 ดังนั้นจะได้ว่า

$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j = 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$

ในเบื้องต้น จะตีกรอบว่า S เป็นจำนวนใดได้บ้าง ให้สังเกตว่า e เป็นจำนวนที่เป็นตัวเชื่อมในรูปสามเหลี่ยมทั้งหกมากที่สุด เราจึงจะใช้สมการที่เกี่ยวข้องกับ e และไม่เกี่ยวกับ e เป็นแนวทางหลักในการแก้ปัญหา

เริ่มจากสมการที่ไม่มีตัวแปร e อยู่เลย คือสมการ (1), (4), (6) นำสมการทั้งสามมารวมกันจะได้

$$3S = (a+b+c+d+g+h+f+i+j)$$
$$3S = (a+b+c+d+e+f+g+h+i+j)-e$$
$$3S = 45-e$$
$$e = 45-3S \quad \dots (7)$$

แต่ e เป็นเลขโดดที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 9 ดังนั้น S ที่เป็นไปได้คือ 12, 13, 14, 15 และเมื่อแทนค่า S ต่าง ๆ ลงในสมการ (7) ก็จะได้ $e = 9, 6, 3, 0$ ตามลำดับ
ต่อไป จะพิจารณาสมการที่มีตัวแปร e ซึ่งได้แก่สมการ 2, 3, 5 จะได้ว่า

$$b+d = c+f = h+i = S-e \quad \dots (8)$$

จากสมการ (8) นี้จะแบ่งการแก้ปัญหาออกเป็น 4 กรณี โดยใช้ค่าของ S กับ e เป็นตัวแบ่ง

**กรณีที่ 1,** $S = 12, e = 9$
จากสมการ (8) จะได้ $b+d = c+f = h+i = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่ามีเพียง 2 แบบที่เลขโดดสองจำนวนซึ่งต่างกัน รวมกันแล้วได้ 3 คือ $3+0 = 1+2$

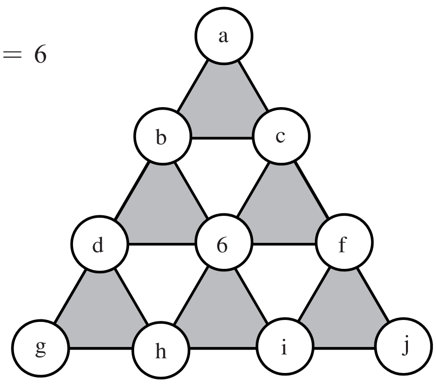
**กรณีที่ 2,** $S = 13, e = 6$
จากสมการ (8) จะได้ $b+d = c+f = h+i = 7$ ซึ่งเป็นไปได้ เพราะว่ามี 3 แบบพอดี ที่เลขโดดสองจำนวนซึ่งต่างกัน รวมกันแล้วได้ 7 คือ $0+7 = 2+5 = 3+4$
($1+6$ ใช้ไม่ได้ เพราะว่า $e = 6$ ใช้ไปแล้ว)

**กรณีที่ 3,** $S = 14, e = 3$
จากสมการ (8) จะได้ $b+d = c+f = h+i = 11$ ซึ่งเป็นไปได้ เพราะว่ามี 3 แบบพอดี ที่เลขโดดสองจำนวนซึ่งต่างกัน รวมกันแล้วได้ 11 คือ $2+9 = 4+7 = 5+6$
($3+8$ ใช้ไม่ได้ เพราะว่า $e = 3$ ใช้ไปแล้ว)

**กรณีที่ 4,** $S = 15, e = 0$
จากสมการ (8) จะได้ $b+d = c+f = h+i = 15$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่ามีเพียง 2 แบบ ที่เลขโดดสองจำนวนซึ่งต่างกัน รวมกันแล้วได้ 3 คือ $6+9 = 7+8$

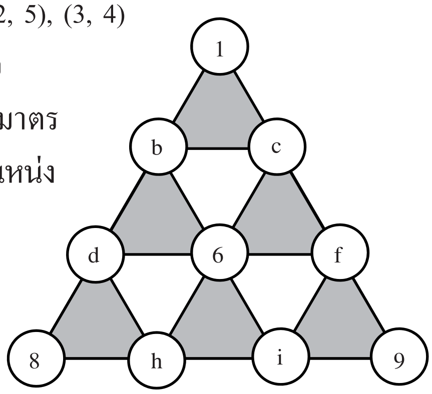
ดังนั้นในตอนนี้ จะมีกรณีที่เป็นไปได้ 2 กรณีเท่านั้นคือกรณีที่ 2 และกรณีที่ 3 ลองมาดูในแต่ละกรณีกัน

**กรณีที่ 2,** $S = 13, e = 6$

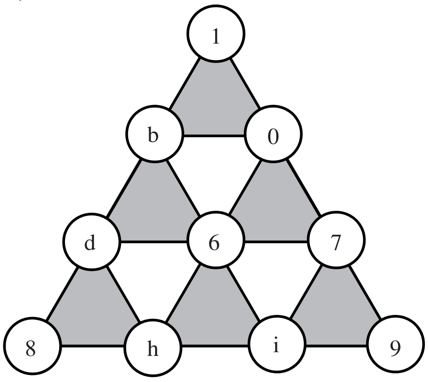



$$b+d = c+f = h+i = 7 = 0+7 = 2+5 = 3+4$$

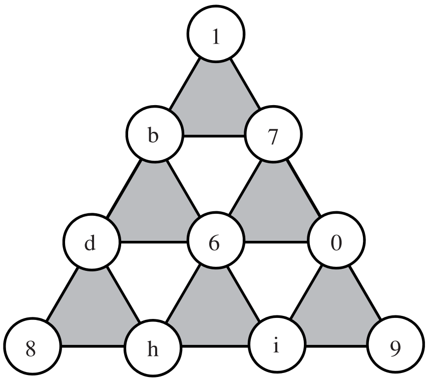
แสดงว่า (b, d), (c, f), (h, i) จะต้องเลือกจาก (0, 7), (2, 5), (3, 4) และจะเห็นว่าจะเหลือจำนวนที่ยังไม่ใช้อีก 3 จำนวนคือ a, g, j ซึ่งจะต้องเลือกจาก {1, 8, 9} และโดยความสมมาตรของรูปสามเหลี่ยม เราจึงสามารถเติม 1, 8, 9 ลงในตำแหน่งของ a, g, j สลับที่กันได้
ตามใจชอบดังนี้



ซึ่งหลังจากนี้ ก็จะเติมจำนวนที่เหลือได้แล้ว และมีลำดับขั้นตอนในการเติมได้หลายแบบ โดยอาศัยการลองผิดลองถูก โดยพิจารณาร่วมกับ S = 13 ด้วย เช่น ถ้าเราเลือกคู่ให้ (c, f) = (0, 7) ถ้าให้ f = 7 แล้วก็จะทำให้รูปสามเหลี่ยมเล็กด้านขวา มีผลบวกของจำนวนในวงกลมที่เป็นจุดยอดมากกว่า 13 ซึ่งเป็นไปไม่ได้แน่ ๆ ดังนั้นจึงต้องลองให้ f = 0, c = 7



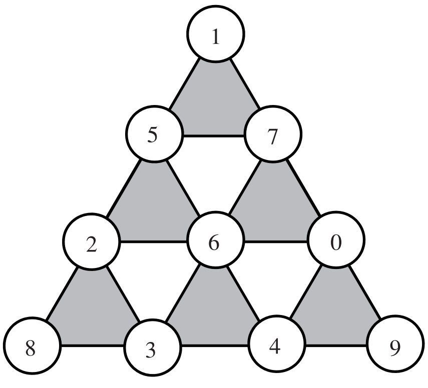

**รูป ก.** เป็นไปไม่ได้แน่ ๆ




**รูป ข.** มีโอกาสเป็นไปได้

จากรูป ข. เนื่องจาก S = 13 ทำให้รู้ค่าของ i = 4 และเมื่อรู้ค่าของ i ก็จะรู้ค่าของ h = 3 แล้วก็จะรู้ค่าของ d = 2 แล้วก็จะรู้ค่าของ b = 5 ในที่สุด ซึ่งทำให้เป็นจริงตามเงื่อนไข คือ

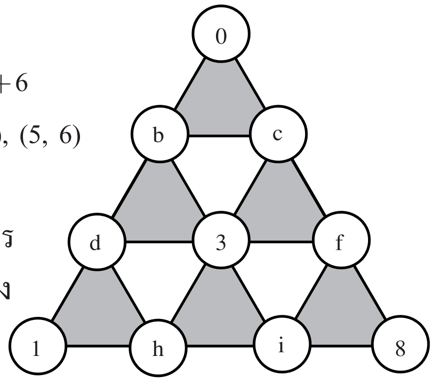
$$1+5+7 = 5+2+6 = 7+6+0 = 2+8+3 = 6+3+4 = 0+4+9$$



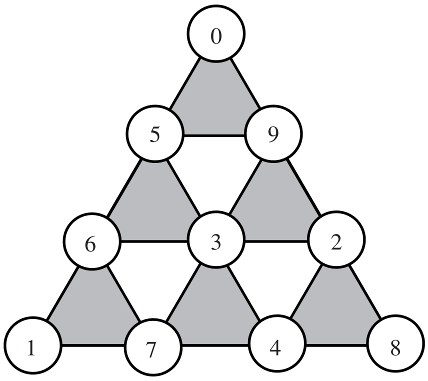

**กรณีที่ 3**, S = 14, e = 3

$$b+d = c+f = h+i = 11 = 2+9 = 4+7 = 5+6$$

แสดงว่า (b, d), (c, f), (h, i) จะต้องเลือกจาก (2, 9), (4, 7), (5, 6) และจะเห็นว่าจะเหลือจำนวนที่ยังไม่ใช้อีก 3 จำนวนคือ a, g, j ซึ่งจะต้องเลือกจาก {0, 1, 8} และโดยความสมมาตรของรูปสามเหลี่ยม เราจึงสามารถเติม 0, 1, 8 ลงในตำแหน่งของ a, g, j สลับที่กันได้ตามใจชอบดังนี้



วิธีการเติมก็ทำได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่แล้ว ซึ่งในที่นี้ $S = 14$ จะเติมได้ดังรูป




สรุปว่ามี 2 แบบเท่านั้นที่เป็นไปได้

10. **ตอบ** 9

**แนวคิด** หาให้ได้ว่ากบจะต้องกระโดดไปในทิศทางลบรวมทั้งหมดกี่หน่วย

สมมติให้ระยะทั้งหมดที่กบกระโดดไปในทิศทางบวก แทนด้วย $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots$
และระยะทั้งหมดที่กบกระโดดไปในทิศทางลบ แทนด้วย $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots$
โดยที่ค่า a กับ b เป็นตั้งแต่ 1, 2, 3, ... , 19

ถ้ากบกระโดดไป 19 ครั้งแล้วอยู่ที่จุด 2008 พอดี จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots) = 2008$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots) - 2008 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots)$$

นำ $(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots)$ บวกเข้าไปทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots) - 2008 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots)$$
$$+ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots)$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots) - 2008 = 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots)$$

แต่เนื่องจาก $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 19^2$

และจากสูตร $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\therefore \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 19^2 = \frac{19(19+1)(38+1)}{6} = \frac{(19)(20)(39)}{6} = 2470$$

แทนค่าในสมการข้างต้น จะได้

$$2470 - 2008 = 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots)$$

$$462 = 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots)$$
$$\therefore \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots = \frac{462}{2} = 231$$

แสดงว่า ผลบวกของระยะทางที่กบกระโดดไปในทิศทางลบ จะต้องรวมกันแล้วได้ 231 พิจารณาค่าต่าง ๆ ของ $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 19^2$ จะเท่ากับ

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361

จะต้องเลือกค่าต่าง ๆ เหล่านี้มารวมกันแล้วให้ได้ 231 ซึ่งเห็นได้ชัดว่าจะต้องตัด 256, 289, 324, 361 ทิ้งไป เพราะมีค่ามากกว่า 231

## การเลือกจะมีหลักการอย่างไร?

**วิธีที่ 1** พิจารณาเศษจากการหารด้วย 4

ถ้าพิจารณาเศษจากการหารด้วย 4 จะพบว่าถ้านำจำนวนต่าง ๆ คือ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225 จะได้เศษเป็น 1 หรือ 0 สลับกันไป

1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1

จำนวนคี่ คือ $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, 13^2, 15^2$ จะหารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 1
จำนวนคู่ คือ $2^2, 4^2, 6^2, 8^2, 10^2, 12^2, 14^2$ จะหารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 0
และเนื่องจาก 231 หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 แสดงว่า จำนวนที่เลือกมาจะต้องเป็นจำนวนที่นำมารวมกันแล้วหารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 เช่นกัน แสดงว่าจะต้องเลือกจำนวนคี่มา 3 ตัว (หรือ 7 ตัว) ส่วนจำนวนที่เหลือให้เลือกจำนวนคู่

มาลองจับกลุ่มจากง่ายที่สุดก่อนคือ $1^2+3^2+5^2 = 1+9+25 = 35$ ยังขาดอีก $231-35 = 196$ เห็นได้ชัดว่า ถ้าเลือก $14^2 = 196$ ก็จะเต็มพอดี นั่นคือ $1^2+3^2+5^2+14^2 = 231$

ซึ่งถ้าเป็นเช่นนี้แล้วก็จะได้ว่า
การกระโดดที่ไปทางซ้าย คือครั้งที่ 1, 3, 5, 14
การกระโดดที่ไปทางขวา คือครั้งที่ 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19

แล้วจะทำให้กระโดดครบ 19 ครั้งแล้วไปยังตำแหน่ง 2008 พอดี

$$\therefore (2^2+4^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2+11^2+12^2+13^2+15^2+16^2+17^2+18^2+19^2)$$
$$-(1^2+3^2+5^2+14^2) = 2008$$

หรืออาจจะเขียนต่อเนื่องกันได้ว่า

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2+11^2+12^2+13^2-14^2+15^2$$
$$+16^2+17^2+18^2+19^2 = 2008$$

จะเห็นได้ว่าถ้าเป็นแบบนี้แล้วการกระโดดครั้งสุดท้ายในทิศทางลบ คือการกระโดดครั้งที่ 14 คำถามมีอยู่ว่า การกระโดดครั้งที่ 14 นี้ถือว่ามีค่าน้อยที่สุดแล้วหรือยัง คำตอบคือยัง เราสามารถกระโดดแบบอื่นโดยที่การกระโดดในทิศทางลบครั้งสุดท้ายน้อยกว่านี้ได้

ลองมาจับกลุ่มต่อไปคือ $1^2+3^2+7^2 = 1+9+49 = 59$ ยังขาดอีก $231-59 = 172$ เมื่อพิจารณาจำนวนคู่ คือ 4, 16, 36, 64, 100, 144 จะพบว่าไม่สามารถนำมารวมกันแล้วได้ 172 ดังนั้นในกรณีจึงไม่มีคำตอบที่ต้องการ

แต่ถ้าลองกลุ่ม $1^2+3^2+9^2 = 1+9+81 = 91$ ยังขาดอีก $231-91 = 140$ เมื่อพิจารณาจำนวนคู่ คือ 4, 16, 36, 64, 100 จะพบว่าจะสามารถนำมารวมกันได้ 140 คือ $4+36+100 = 140$

$$\therefore\ -1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2+7^2+8^2-9^2-10^2+11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+16^2+17^2+18^2+19^2 = 2008$$

ถ้าเป็นแบบนี้แล้ว การกระโดดครั้งที่ 10 จะเป็นการกระโดดในทิศทางลบครั้งสุดท้ายซึ่งน้อยกว่าครั้งที่ 14 ที่หาในตอนแรก

และถ้าลองกลุ่ม $1^2+7^2+9^2 = 1+49+81 = 131$ ยังขาดอีก $231-131 = 100$ เห็นได้ชัดว่าจำนวนคู่ที่ต้องเลือก ใช้เพียง $10^2$ ก็พอ

$$-1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2-7^2+8^2-9^2-10^2+11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+16^2+17^2+18^2+19^2 = 2008$$

ถ้าเป็นแบบนี้แล้ว การกระโดดครั้งที่ 10 ก็ยังคงเป็นการกระโดดในทิศทางลบครั้งสุดท้ายที่น้อยที่สุด ซึ่งเมื่อจับกลุ่มที่เหลือได้แก่ $1^2+5^2+7^2$, $1^2+5^2+9^2$, $3^2+5^2+7^2$, $3^2+5^2+9^2$ , $3^2+7^2+9^2$, $5^2+7^2+9^2$ ก็จะได้ผลลัพธ์ดังตาราง (เราพิจารณาเฉพาะกลุ่มผลบวกจำนวนคี่ที่ไม่เกิน 9 เพราะต้องการให้ได้น้อยกว่าครั้งที่ 10)

| **ผลบวก** | **ยังขาดอีก** | **เขียนในรูปผลบวกของ 4, 16, 36, 64 ได้หรือไม่** |
|---|---|---|
| $1^2+5^2+7^2 = 75$ | $231-75 = 156$ | ไม่ได้ |
| $1^2+5^2+9^2 = 107$ | $231-107 = 124$ | ไม่ได้ |
| $3^2+5^2+7^2 = 83$ | $231-83 = 148$ | ไม่ได้ |
| $3^2+5^2+9^2 = 115$ | $231-115 = 116$ | ได้คือ $16+36+64 = 4^2+6^2+8^2$ |
| $3^2+7^2+9^2 = 139$ | $231-139 = 92$ | ไม่ได้ |
| $5^2+7^2+9^2 = 155$ | $231-155 = 76$ | ไม่ได้ |

จากตารางจะเห็นได้ว่า กรณีจับกลุ่ม $3^2+5^2+9^2 = 115$ จะสามารถรวมกับ $4^2+6^2+8^2 = 116$ จะได้ 231 พอดี

$$\therefore\ 1^2+2^2-3^2-4^2-5^2-6^2+7^2-8^2-9^2+10^2+11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+16^2+17^2+18^2+19^2 = 2008$$

แล้วแสดงว่า การกระโดดครั้งสุดท้ายในทิศทางลบที่มีค่าน้อยที่สุด คือการกระโดดครั้งที่ 9

ซึ่งเราสามารถแสดงได้ว่า การกระโดดครั้งที่ 9 เป็นการกระโดดในทิศทางลบซึ่งน้อยที่สุดครั้งสุดท้าย ไม่มีทางน้อยกว่าครั้งที่ 9 อีกแล้ว ด้วยเหตุผลดังนี้

เนื่องจาก $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2 = \dfrac{8(8+1)(2\cdot 8+1)}{6} = 204$

จะเห็นได้ว่า ถ้ามีการกระโดดไปทางทิศทางลบครั้งสุดท้ายน้อยกว่าครั้งที่ 9 คือครั้งที่ 8 ลงมาแล้ว ผลบวกของการกระโดดไปในทิศทางลบ จะมีไม่พอที่จะรวมแล้วได้ 231 เพราะรวมเต็มที่ก็ได้ 204 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าครั้งที่ 9 เป็นการกระโดดในทิศทางลบที่มีค่าน้อยสุด ครั้งสุดท้ายจริง ๆ

ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้ จึงนำไปสู่แนวคิดวิธีที่ 2

**วิธีที่ 2** หาผลบวกของ $1^2+2^2+3^2+\dots$ ที่มีค่ามากกว่า 231 เป็นครั้งแรก

จะพบว่า $1^2+2^2+3^2+\dots+8^2 = 204 < 231$

และ $1^2+2^2+3^2+\dots+8^2+9^2 = 285 > 231$

จะเห็นว่า 285 มีค่ามากกว่า 231 เท่ากับ $285-231 = 54$

แล้วเราเห็นได้ไม่ยากกว่า $54 = 1+4+49 = 1^2+2^2+7^2$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 231 &= 285-54\\ &= (1^2+2^2+3^2+\dots+8^2+9^2)-(1^2+2^2+7^2)\\ &= 3^2+4^2+5^2+6^2+8^2+9^2\end{aligned}$$

$$\therefore\ 1^2+2^2-3^2-4^2-5^2-6^2+7^2-8^2-9^2+10^2+11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+16^2+17^2+18^2+19^2 = 2008$$

ซึ่งตรงกับวิธีแรกนั่นเอง