วันอังคารที่ ๑๐ กรกฎาคม ๒๕๕๕

โจทย์ข้อที่ ๑ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มี J เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสัมผัสนอกตรงข้ามกับ A วงกลมนี้สัมผัสด้าน BC ที่ M และสัมผัสเส้นตรง AB และ AC ที่ K และ L ตามลำดับ เส้นตรง LM และ BJ ตัดกันที่ F และ เส้นตรง KM และ CJ ตัดกันที่ G ให้ S เป็นจุดตัดของของเส้นตรง AF และ BC และให้ T เป็นจุดตัดของเส้นตรง AG และ BC จงพิสูจน์ว่า M เป็นจุดกึ่งกลางของ ST

(วงกลมสัมผัสนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC ตรงข้ามกับ A คือวงกลมที่สัมผัสด้าน BC, รังสี AB ส่วนที่เลย B และ รังสี AC ส่วนที่เลย C)

โจทย์ข้อที่ ๒ ให้ $n \geq 3$ เป็นจำนวนเต็มและให้ $a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(1+a_2\right)^2\left(1+a_3\right)^3\cdots\left(1+a_n\right)^n > n^n$$

โจทย์ข้อที่ ๓ เกม "ทายใจคนโกหก" เป็นเกมที่เล่นระหว่างผู้เล่น A และผู้เล่น B เกมนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนเต็มบวก k และ n ซึ่งเป็นที่รู้กันของทั้งสองฝ่าย เกมเริ่มเมื่อ ผู้เล่น A เลือกจำนวนเต็ม x และ N โดยที่ $1 \leq x \leq N$ ผู้เล่น A เก็บค่า x ไว้เป็นความลับและบอกค่า N ให้ผู้เล่น B ทราบโดยไม่โกหก ผู้เล่น B จะพยายามหาข้อมูลเกี่ยวกับค่า x โดยตั้งคำถามให้ผู้เล่น A ตอบ ในแต่ละคำถาม ผู้เล่น B จะเลือกเซต S ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกขึ้นมา แล้วถามผู้เล่น A ว่า x อยู่ในเซต S หรือไม่ ในการเล่นเกมนี้ผู้เล่น B สามารถตั้งคำถามกี่ครั้งก็ได้ (อาจเลือกเซต S ซ้ำกับที่ได้ถามไปแล้วได้ด้วย) ผู้เล่น A จะต้องตอบ *ใช่* หรือ *ไม่ใช่* ทันทีหลังจากถูกถามแต่ละคำถามแต่อาจจะโกหกก็ได้ ภายใต้ข้อบังคับว่า ผู้เล่น A จะต้องตอบความจริงอย่างน้อยหนึ่งครั้ง ในทุก $k+1$ ครั้งใดๆ ที่ติดต่อกันของการตอบคำถาม

หลังจากผู้เล่น B ถามจนพอใจแล้วเขาจะเลือกเซต X ที่มีจำนวนเต็มบวกเป็นสมาชิกอย่างมาก n ตัว ซึ่งถ้า x อยู่ใน X จะถือว่าผู้เล่น B ชนะ มิฉะนั้นจะถือว่าผู้เล่น B แพ้ จงพิสูจน์ว่า

1. ถ้า $n \geq 2^k$ แล้ว จะรับประกันว่าผู้เล่น B มีวิธีชนะ
2. สำหรับ k ใดๆ ที่มีค่ามากเพียงพอ จะมีจำนวนเต็ม $n \geq 1.99^k$ ซึ่งไม่สามารถรับประกันได้ว่าผู้เล่น B มีวิธีชนะ

เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน

วันพุธที่ ๑๑ กรกฎาคม ๒๕๕๕

โจทย์ข้อที่ ๔ จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมด ซึ่งสำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b, c ที่สอดคล้อง $a + b + c = 0$ จะได้ว่าสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

(ในที่นี้ $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด)

โจทย์ข้อที่ ๕ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\angle BCA = 90^\circ$ และให้ D เป็นจุดปลายเส้นส่วนสูงจาก C ให้ X เป็นจุดภายในของด้าน CD ให้ K เป็นจุดบนด้าน AX ที่ทำให้ $BK = BC$ ในทำนองเดียวกัน ให้ L เป็นจุดบนด้าน BX ที่ทำให้ $AL = AC$ ให้ M เป็นจุดตัดของ AL และ BK จงแสดงว่า $MK = ML$

โจทย์ข้อที่ ๖ จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดที่ทำให้มีจำนวนเต็มไม่ลบ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ซึ่ง

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$$

เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน