

8. จงหาจำนวนเต็มบวกน้อยสุดซึ่งเป็นตัวคูณร่วมของ 7 และ 8 โดยที่เลขโดดในแต่ละหลักมีค่าเป็น 7 หรือ 8 โดยมี 7 อย่างน้อยหนึ่งตัว และมี 8 อย่างน้อยหนึ่งตัว

ตอบ 7,888,888

แนวคิด

- จำนวนนับสามหลักใด ๆ ขึ้นไป จะหารด้วย 8 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ สามหลักสุดท้ายของจำนวนนั้นหารด้วย 8 ลงตัว
- เศษจากการหาร $A \times B$ ด้วย 7 จะเท่ากับ เศษจากการหาร “ผลคูณของเศษจากการหาร A ด้วย 7 กับ เศษจากการหาร B ด้วย 7” ด้วย 7

จำนวนที่เป็นตัวคูณร่วมของ 7 กับ 8 จะต้องหารด้วยทั้ง 7 และ 8 ลงตัว

ถ้าพิจารณาการหารด้วย 8 ลงตัว แล้วสามหลักสุดท้ายของจำนวนนั้นจะต้องหารด้วย 8 ลงตัว แต่เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ได้ว่า เลขโดดที่ใช้ได้มีเพียง 2 ตัวคือ 7 กับ 8

ดังนั้นสามหลักสุดท้ายของจำนวนที่ต้องการ มีค่าเป็น 888 ได้เท่านั้น (ซึ่งหารด้วย 8 ลงตัว ในขณะที่ค่าอื่น ๆ คือ 777, 778, 787, 877, 788, 878, 887 ใช้ไม่ได้ เพราะหารด้วย 8 ไม่ลงตัว)

จากนั้นสมมติให้ A เป็นจำนวนที่นำเลขโดด 7 หรือ 8 มาเติมหน้า 888 เช่น ถ้าเขียนว่า 87888 จะได้ว่า $A = 87$ เป็นต้น.

ให้ $N = \overline{A888}$ เป็นจำนวนที่มีสมบัติตามที่โจทย์ต้องการ

จะได้ว่า $N = 1000A + 888$

ถ้าพิจารณาการหารด้วย 7 ลงตัว แล้ว N จะหารด้วย 7 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $1000A + 888$ หารด้วย 7 ลงตัว

และเนื่องจาก 888 หารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 6 ดังนั้น $1000A$ จะต้องหารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 1 จึงจะทำให้ $1000A + 888$ หารด้วย 7 ลงตัว

และเนื่องจาก $1000A = 1000 \times A$ ซึ่ง 1000 หารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 6 แล้วแสดงว่า A จะต้องเป็นจำนวนที่หารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 6 เท่านั้น จึงจะทำให้ $1000A$ หารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 1 (เนื่องจาก $6 \times 6 = 36$ ซึ่งหารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 1)

เนื่องจาก A อาจจะเป็นจำนวนหนึ่งหลักขึ้นไป ดังนั้นเราจะแบ่งการพิจารณาที่ละกรณีไล่ขึ้นไปเรื่อย ๆ ดังนี้

กรณีที่ 1. A เป็นจำนวนหนึ่งหลัก

แล้ว $A = 7$ เท่านั้น (เพราะโจทย์กำหนดให้ต้องใช้เลขโดด 7 อย่างน้อย 1 ตัว)
 แต่เนื่องจากเศษจากการหาร 7 ด้วย 7 ได้ 0 (เราต้องการเศษเป็น 6)
 ดังนั้น ในกรณีนี้ไม่มี A ที่เป็นไปได้

กรณีที่ 2. A เป็นจำนวนสองหลัก

แล้ว A อาจจะมีค่าเป็น 77, 78, 87 ซึ่งเราพบว่า

เศษจากการหาร 77 ด้วย 7 ได้ 0

เศษจากการหาร 78 ด้วย 7 ได้ 1

เศษจากการหาร 87 ด้วย 7 ได้ 3

ดังนั้น ในกรณีนี้ไม่มี A ที่เป็นไปได้

กรณีที่ 3. A เป็นจำนวนสามหลัก

แล้ว A อาจจะมีค่าเป็น 777, 778, 787, 877, 788, 878, 887 ซึ่งเราพบว่า

เศษจากการหาร 777 ด้วย 7 ได้ 0

เศษจากการหาร 778 ด้วย 7 ได้ 1

เศษจากการหาร 787 ด้วย 7 ได้ 3

เศษจากการหาร 877 ด้วย 7 ได้ 2

เศษจากการหาร 788 ด้วย 7 ได้ 4

เศษจากการหาร 878 ด้วย 7 ได้ 3

เศษจากการหาร 887 ด้วย 7 ได้ 5

ดังนั้น ในกรณีนี้ไม่มี A ที่เป็นไปได้

กรณีที่ 4. A เป็นจำนวนสี่หลัก

แล้ว A อาจจะมีค่าเป็น 7777, 7778, 7787, 7877, 8777, 7788, 7878, 7887, 8788, 8878, 8877, 7888,
 8788, 8878, 8887

เศษจากการหาร 7777 ด้วย 7 ได้ 0

เศษจากการหาร 7778 ด้วย 7 ได้ 1

เศษจากการหาร 7787 ด้วย 7 ได้ 3

เศษจากการหาร 7877 ด้วย 7 ได้ 2

เศษจากการหาร 8777 ด้วย 7 ได้ 6

เศษจากการหาร 7788 ด้วย 7 ได้ 4

เศษจากการหาร 7878 ด้วย 7 ได้ 3

เศษจากการหาร 7887 ด้วย 7 ได้ 5

สำหรับจำนวนที่เหลือคือ 8788, 8878, 8877, 7888, 8788, 8878, 8887 พิจารณาเฉพาะ 7888 ก็พอ เพราะตอนนี้เราได้ 8777 มาค่าหนึ่งที่ใช้ได้แล้ว ถ้าจะมีอีก ก็ต้องมีค่าน้อยกว่า 8777 ซึ่งเราจะพบว่า

เศษจากการหาร 7888 ด้วย 7 ได้ 6

ดังนั้น ในกรณีที่ A เป็นจำนวนสี่หลัก แล้วจะมีค่าที่เป็นไปได้สองค่าคือ 8,777,888 กับ 7,888,888 ซึ่งค่าน้อยสุดคือ 7,888,888