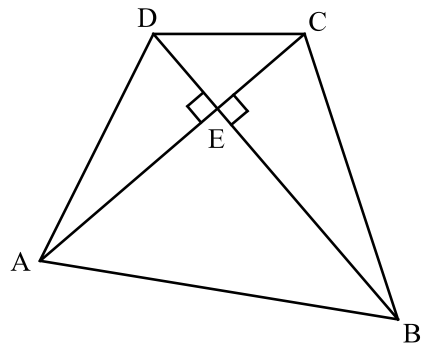
1. รูปสี่เหลี่ยมคางหมูรูปหนึ่งมีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกันและส่วนสูง 5 หน่วย ถ้าเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว 13 หน่วย จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

ตอบ $\frac{845}{24}$ ตารางหน่วย

แนวคิด ใช้ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายและสูตรในการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นแทยงมุมตั้งฉากกัน และทฤษฎีบทพีทาโกรัสหรืออาจจะใช้ตรีโกณมิติด้วยก็ได้

สูตรพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกันคือ $\frac{1}{2}\times$ผลคูณของเส้นทแยงมุม

ซึ่งพิสูจน์ได้ไม่ยาก ดังนี้



จากรูปจะได้ว่า พื้นที่ $\Delta BCD = \frac{1}{2}\times BD\times CE$

และ พื้นที่ $\Delta ABD = \frac{1}{2}\times BD\times AE$

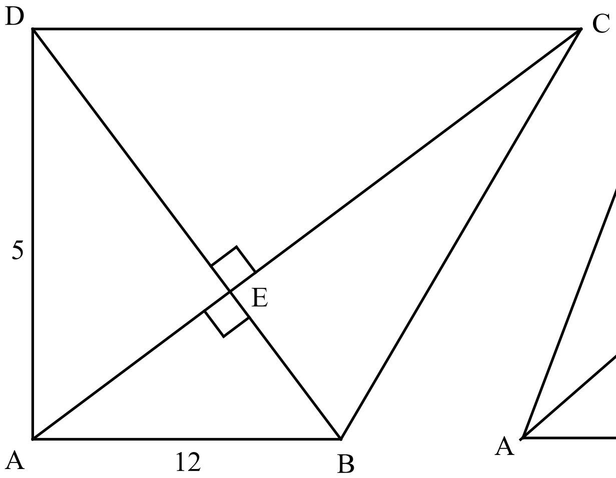
ดังนั้น พื้นที่ $\square$ ABCD = พื้นที่ ΔBCD + พื้นที่ ΔABD

$$= \frac{1}{2}\times BD\times CE + \frac{1}{2}\times BD\times AE$$

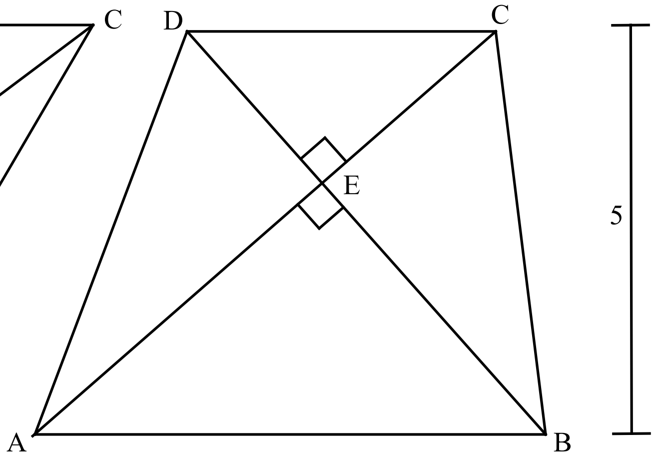
$$= \frac{1}{2}\times BD\times (CE + AE)$$

$$= \frac{1}{2}\times BD\times AC$$

เพื่อความง่ายในการคำนวณ เราอาจจะเลือกวาดรูปสามเหลี่ยมคางหมู ให้เป็นไปในลักษณะรูปที่ 1 คือ $\angle ADB = 90^\circ$ แต่อย่างไรก็ตามที ถ้าวาดรูปแบบทั่วไป ตามลักณะรูปที่ 2 ก็ให้ผลลัพธ์เหมือนกัน เพียงแต่อาจจะมองความสัมพันธ์ยากกว่าเล็กน้อย



รูปที่ 1



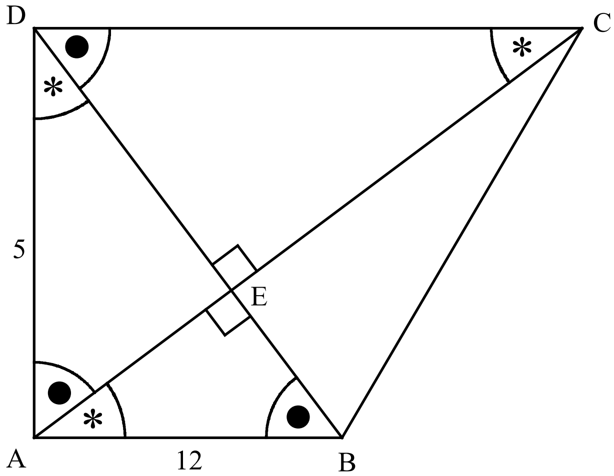
รูปที่ 2

วิธีที่ 1. ใช้รูปที่ 1 เพื่อหาค่า AC

จากรูปที่ 1. สมมติให้เส้นทแยงมุม BD $=$ 13 หน่วย และ AD ตั้งฉากกับ AB นั่นคือ AD เป็นส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD โดยที่ AD $=$ 5 หน่วย

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ หน่วย

จากนั้น สมมติให้ $\angle ABE = \bullet$ และ $\angle BAE = *$ จะได้มุมต่าง ๆ มีค่าดังรูป



ซึ่งมีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันหลายคู่

จะหาความยาวของ AC ก่อน โดยใช้ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมคล้าย ดังนี้

จากรูปจะเห็นว่า $\Delta ACD \sim \Delta ABD$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BD}{AB}$$

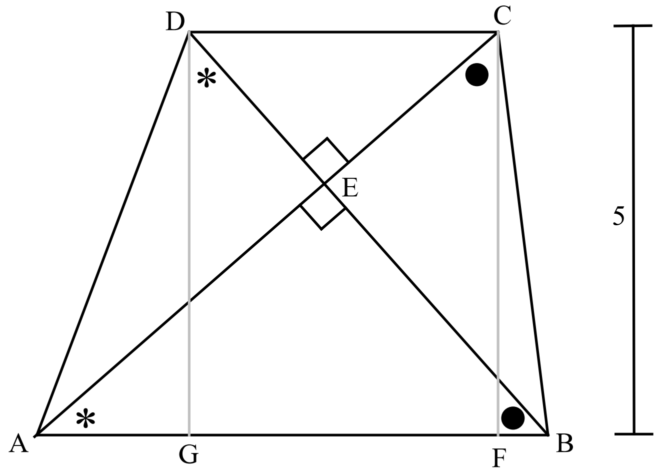
$$\frac{AC}{5} = \frac{13}{12}$$

$$AC = \frac{65}{12}$$

ดังนั้น พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD $= \frac{1}{2} \times BD \times AC = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{65}{12} = \frac{845}{24}$ ตารางหน่วย

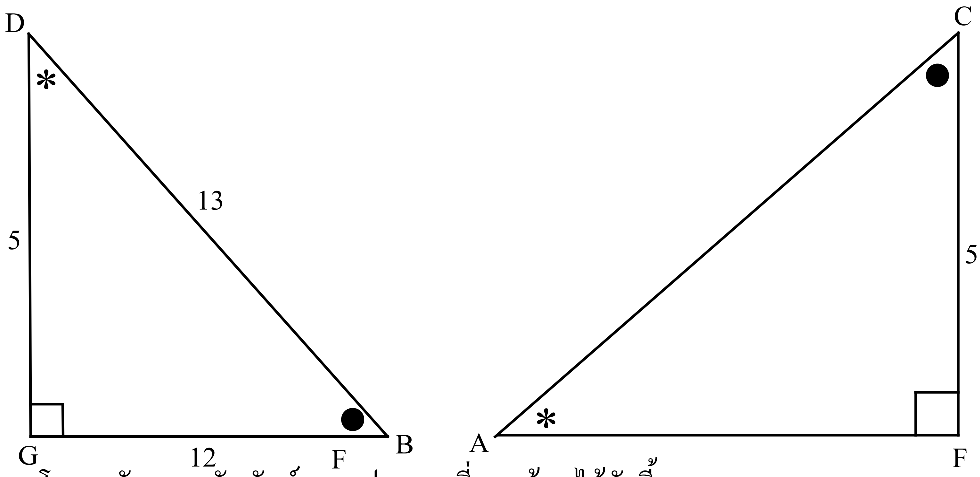
วิธีที่ 2. ใช้รูปที่ 2 เพื่อหาค่า AC

จากรูปที่ 2 จากจุดยอด C และ D ให้ลากส่วนของเส้นตรงลงมาตั้งฉากกับฐานที่จุด F และ G ตามลำดับ แล้วสมมติมุม ● และ * ในลักษณะเดียวกับรูปที่ 1



สมมติให้เส้นทแยงมุม BD = 13 หน่วย โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BDG จะได้ว่า $GB = \sqrt{BD^2 - DG^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ หน่วย

และเมื่อพิจารณาจากมุม จะเห็นว่า $\Delta BDG \sim \Delta AFC$ เราจะแยกรูปออกมาเพื่อให้ดูความสัมพันธ์ง่าย ๆ ดังนี้



หา AC โดยอาศัยความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมคล้าย ได้ดังนี้

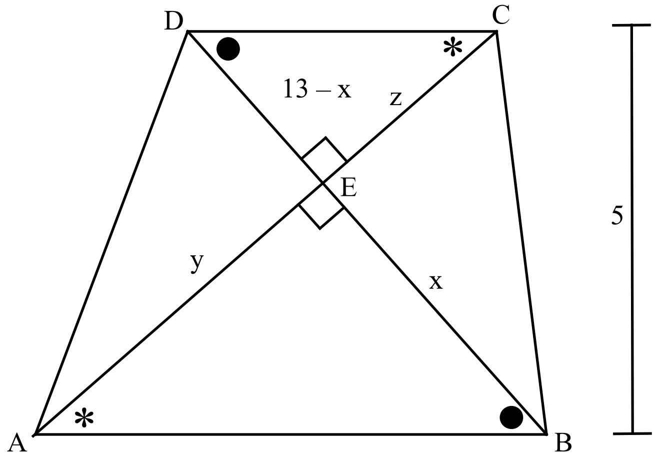
$$\frac{AC}{CF} = \frac{BD}{BG}$$

$$\frac{AC}{5} = \frac{13}{12}$$

$$AC = \frac{65}{12}$$

จากนั้นก็หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD ได้แบบเดียวกับวิธีที่ 1

วิธีที่ 3. ใช้รูปที่ 2 กับความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายและตรีโกณมิติ โดยไม่ต้องหาค่าของ AC



สมมติให้ BD = 13 และสมมติตัวแปรต่าง ๆ ตามรูป

ดังนั้น พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD $= \frac{1}{2} \times BD \times AC = \frac{1}{2} \times 13 \times (y + z)$

นั่นคือ เราจะต้องหาค่าของ $y + z$ ให้ได้

ซึ่งเมื่อพิจารณาจากรูป จะเห็น $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ ทำให้ได้ว่า

$$\frac{x}{13 - x} = \frac{y}{z}$$

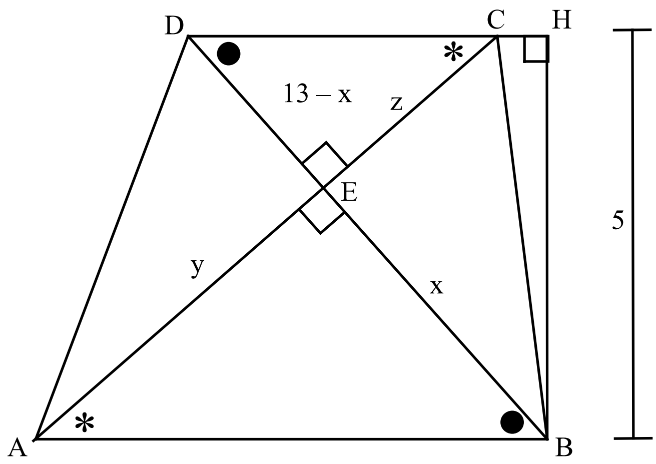
$$xz = 13y - xy$$

$$xz + xy = 13y$$

$$z + y = \frac{13y}{x}$$

$\therefore$ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD $= \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{13y}{x} = \frac{169}{2} \times \frac{y}{x}$ $\qquad \ldots (1)$

ซึ่งเราจะต้องหาค่าของ $\frac{y}{x}$ ให้ได้ และจากรูป ΔABE จะเห็นว่าค่าของ $\frac{y}{x}$ ก็คือ tan ของมุม ● นั่นเอง เมื่อลากเส้นตรงต่อออกไป ดังรูป



โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

ดังนั้น $\tan \bullet = \frac{BH}{DH} = \frac{5}{12}$ นั่นเอง

เมื่อแทนค่าของ $\frac{y}{x} = \tan \bullet = \frac{5}{12}$ ลงในสมการ (1) ก็จะได้

พื้นที่ $\square$ $ABCD = \frac{169}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{845}{24}$ ตารางหน่วย