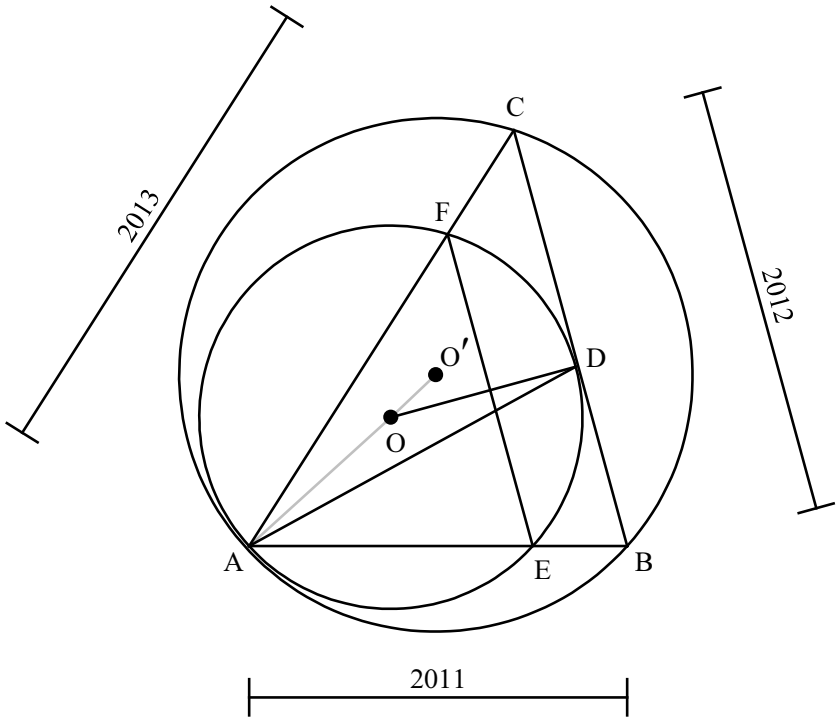
22. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มี AB = 2011 หน่วย, BC = 2012 หน่วย และ CA = 2013 หน่วย วงกลม O สัมผัสวงกลมที่ล้อมรอบ ABC ที่จุด A สัมผัส BC ที่จุด D ตัด AB และ AC ที่จุด E และ F ตามลำดับ EF ยาวกี่หน่วย

ตอบ 1,509 หน่วย

แนวคิด 1. ใช้ความรู้เรื่องการแปลงทางเรขาคณิตแบบการเปลี่ยนขนาด
2. ใช้ทฤษฎีบทเส้นแบ่งครึ่งมุมในรูปสามเหลี่ยม
3. ใช้ทฤษฎีบทกำลังของจุด

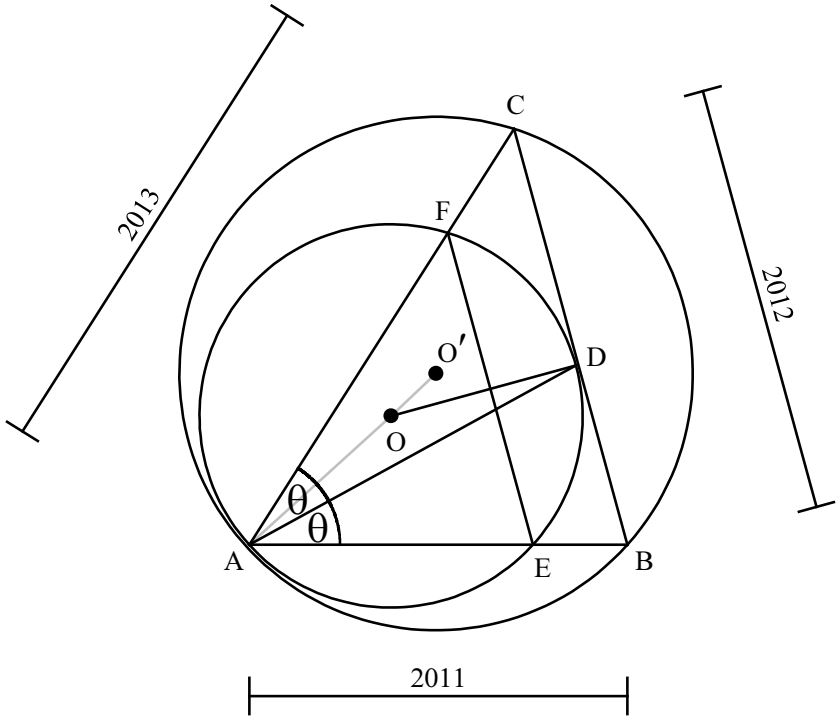


จากรูป จะเห็นว่าวงกลม O' เป็นภาพที่ได้จากการแปลงวงกลม O แบบการเปลี่ยนขนาด (dilation) โดยมีจุดศูนย์กลางของการแปลงอยู่ที่จุด A ซึ่งทำให้ได้ว่า $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ นั่นคือแสดงว่า EF // BC

ดังนั้นโดยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย จะได้ว่า $\frac{EF}{AE}=\frac{BC}{AB}$ แทนค่า BC = 2012 และ AB = 2011 จะได้ว่า

$$EF = \frac{2012}{2011} \times AE \qquad \ldots (*)$$

ลากส่วนของเส้นตรง AD เราจะพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า $\overline{AD}$ จะเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม A ของ ΔABC (ดูการพิสูจน์ในตอนท้ายข้อ)



ขั้นที่ 1. หา BD

โดยทฤษฎีบทเส้นแบ่งครึ่งมุมในรูปสามเหลี่ยม จะได้ว่า $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$$\therefore \qquad \frac{BD}{2012 - BD} = \frac{2011}{2013}$$

$$2013 \cdot BD = 2011 \times 2012 - 2011 \cdot BD$$

$$BD = \frac{2011 \times 2012}{2024}$$

$$BD = \frac{2011}{2}$$

ขั้นที่ 2. หา AE

โดยทฤษฎีบทกำลังของจุด (power of a point theorem) เมื่อพิจารณาว่าจุด B เป็นจุดภายนอกวงกลม O แล้วลาก BA ไปตัดกับวงกลม O ที่จุด E กับ ลากไปสัมผัสวงกลม O ที่จุด D จะได้ว่า

$$BD\times BD = BE\times BA$$

$$BD^2 = (2011 - AE)\times 2011$$

$$2011 - AE = \frac{BD^2}{2011}$$

$$AE = 2011 - \frac{BD^2}{2011}$$

แทนค่า $BD = \frac{2011}{2}$ จากขั้นที่ 1 จะได้ว่า

$$AE = 2011 - \frac{2011}{4}$$

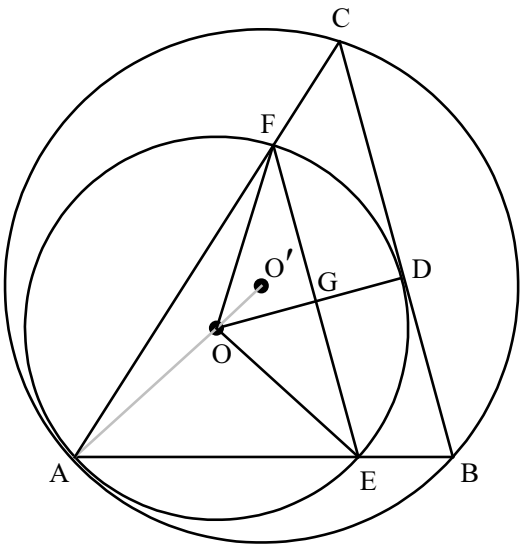
$$\therefore \quad AE = \frac{3}{4}\times 2011$$

แทนค่า $AE = \frac{3}{4}\times 2011$ ลงในสมการ (*) จะได้ว่า

$$EF = \frac{2012}{2011}\times AE = \frac{2012}{2011}\times\frac{3}{4}\times 2011 = 503\times 3 = 1509$$

การพิสูจน์ว่า $\overline{AD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม A ของ Δ ABC

ขั้นที่ 1. จะพิสูจน์ว่า D เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง $\overset{\frown}{EF}$ (ด้านขวา)



จากรูป จะได้ $\Delta OEG \cong \Delta OGF$ แบบ ด้าน–ด้าน–มุม

(OG = OG ด้านร่วม, OE = OF รัศมีวงกลม O, $\angle OEG = \angle OFG$ เพราะ ΔOEF เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

โดยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จึงสรุปได้ว่า

$$\angle GOE = \angle GOF$$

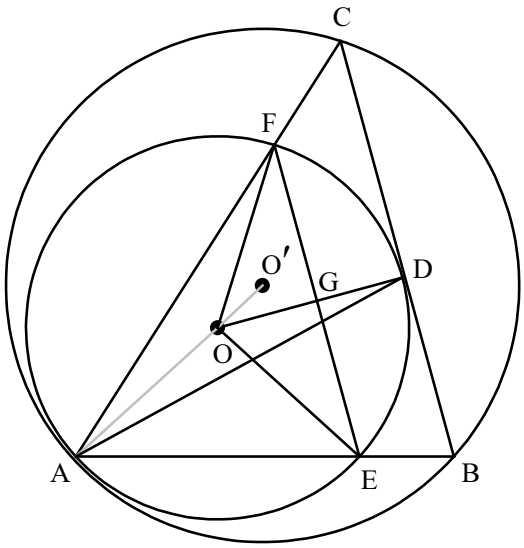
ดังนั้น $\angle DOE = \angle DOF$

$\therefore \quad \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{DF}$

(เพราะเป็นส่วนโค้งของมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับมุมที่มีขนาดเท่ากัน)

จึงสรุปได้ว่า D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overset{\frown}{EF}$

ขั้นที่ 2. ลาก $\overline{AD}$



จะเห็นได้ชัดว่า $\angle DAE$ มีส่วนโค้ง $\overset{\frown}{DE}$ รองรับ

และ $\angle DAF$ มีส่วนโค้ง $\overset{\frown}{DF}$ รองรับ

แต่จากขั้นที่ 1. เราทราบว่า $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{DF}$ ทำให้ได้ว่า $\angle DAE = \angle DAF$

จึงสรุปได้ว่า $\overline{AD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม